Cuadernos de Investigación UCEIF
Número 3/2011

LIQUIDEZ, VOLATILIDAD ESTOCÁSTICA Y SALTOS

2010 Premio Tesis Doctorales

Ana González Urteaga

Directores:
Alfonso Novales y Gonzalo Rubio

Fundación UCEIF

CANTABRIA CAMPUS INTERNACIONAL
Banca, Finanzas y Actividad Empresarial

PUbliCan Ediciones
Universidad de Cantab

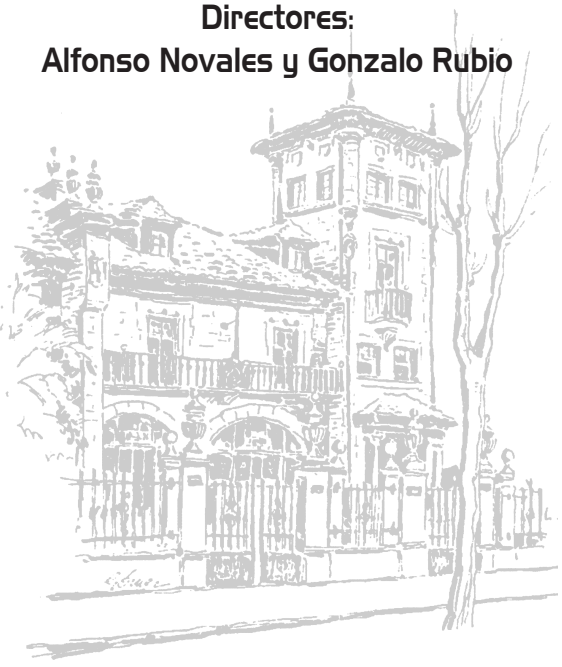
Cuadernos de Investigación UCEIF Número 3/2011

LIQUIDEZ, VOLATILIDAD ESTOCÁSTICA Y SALTOS

2010 Premio Tesis Doctorales

Ana González Urteaga

Directores:
Alfonso Novales y Gonzalo Rubio



CANTABRIA CAMPUS INTERNACIONAL
Banca, Finanzas y Actividad Empresarial

PUbliCan Ediciones
Universidad de Cantabria

González Urteaga, Ana
Liquidez, volatilidad estocástica y saltos / Ana González Urteaga; directores, Alfonso Novales y Gonzalo Rubio. – Santander: Editorial de la Universidad de Cantabria, D.L. 2013.

67 p. : il. ; 24 cm. – (Cuadernos de investigación UCEIF; 3/2011)
"2010 Premio Tesis Doctorales"
En la port.: Cantabria Campus Internacional, Banca, Finanzas y Actividad Empresarial.
D.L. SA. 117-2013. – ISBN 978-84-86116-72-9

1. Análisis financiero. 2. Gestión del riesgo – Métodos estadísticos. I. Fundación de la Universidad de Cantabria para el Estudio y la Investigación del Sector Financiero.

336.76

Esta edición es propiedad de la EDITORIAL DE LA UNIVERSIDAD DE CANTABRIA, cualquier forma de reproducción, distribución, traducción, comunicación pública o transformación sólo puede ser realizada con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra.

© Ana González Urteaga
© Editorial de la Universidad de Cantabria
Avda. de los Castros s/n - 39005 Santander, Cantabria (España)
Teléf.-Fax +34 942 201 087
www.editorialuc.es

Promueve: Fundación de la Universidad de Cantabria para el Estudio y la Investigación del Sector Financiero (UCEIF)

Coordinadora: Ana Fernández Laviada
Secretario: Evan Brock Gray

ISBN: 978-84-86116-72-9

Depósito Legal: SA 117-2013

Impreso en España. *Printed in Spain*

FUNDACIÓN DE LA UNIVERSIDAD DE CANTABRIA PARA EL ESTUDIO Y LA INVESTIGACIÓN DEL SECTOR FINANCIERO (UCEIF)

La Fundación de la Universidad de Cantabria para el Estudio y la Investigación del Sector Financiero (UCEIF) se constituye en 2006, bajo el patronazgo de la Universidad de Cantabria y el Santander, con el propósito de convertirse en una institución de referencia en la generación, difusión y transferencia del conocimiento sobre el sector financiero en todas sus facetas. Mediante la identificación, desarrollo y promoción del talento y la innovación, apoya el liderazgo sostenible y socialmente responsable de las instituciones que la patrocinan y de aquellas con las que establece alianzas, como contribución al bienestar, desarrollo y progreso de los pueblos.

Sus principales objetivos y actividades son: ofrecer estudios avanzados en banca y mercados financieros para la promoción del talento de las nuevas generaciones, impulsar la investigación, promover eventos de interés nacional e internacional y cuantas acciones se encaminen a la difusión y transferencia del conocimiento financiero y económico, así como al reconocimiento y apoyo a estudiantes e investigadores interesados en el sector.

La Fundación ha consolidado el nivel y prestigio internacional de los programas formativos de postgrado, reconocidos por la Universidad de Cantabria y desarrollados con la colaboración del Santander. Entre ellos, el Máster en Banca y Mercados Financieros que se imparte en España desde 1996, en la sede operativa de la Fundación (distinguido con el Premio AUIP a la Calidad del Postgrado en Iberoamérica), en México, desde 1999 con la Universidad Anáhuac y el Santander México (primero

en el ranking de Expansión-CNN como el más innovador de su especialidad en México) y en Marruecos, desde 2008 con la Universidad Hassan II de Casablanca, el Attijariwafa Bank y el Santander España (primero del Magreb y segundo de África, según el ranking sobre los Máster en Finanzas realizado por la Revista *Jeune Afrique*).

En su reconocimiento del talento y apoyo a investigadores y estudiantes la Fundación convoca becas, premios y ayudas a la investigación, promoviendo también la edición de libros, cuadernos de investigación y revistas especializadas.

Asimismo la Fundación gestiona el Archivo Histórico del Banco Santander (www.archivohistoricosantander.com), cuyos fondos son referencia a nivel mundial para la investigación de la historia financiera y bancaria, y ha sentado las bases de un proyecto de educación financiera por medio del portal creado al efecto: www.finanzasparamortales.com. La integración de sus actividades bajo el Santander Financial Institute (SanFI) como centro generador y transmisor de conocimiento de vanguardia será una realidad en 2012.

En el marco del *Campus de Excelencia Internacional* la Fundación organiza periódicamente diversos cursos y encuentros con la UIMP y la UC, así como los "*Encuentros de Economistas Especialistas en Iberoamérica*" convocados por la SEGIB anualmente.

Finalmente destacar su participación como patrono en la creación, en alianza con las Universidades de Murcia, Politécnica de Cartagena y Cantabria, de la Fundación para el Análisis Estratégico y Desarrollo de la Pyme, en cuyo seno se crea la Red Internacional de Investigadores en Pymes. Fruto de esta actuación se elaboran diversos Informes sobre la Pyme en Iberoamérica, tanto a nivel de la región en su conjunto como en los distintos países.

FRANCISCO JAVIER MARTÍNEZ GARCÍA
Director de la Fundación UCEIF

ÍNDICE

9 Introducción

11 Capítulo 1. Selección de carteras y efecto liquidez

30 Capítulo 2. Análisis empírico de la volatilidad estocástica y saltos para modelos en tiempo continuo de índices bursátiles utilizando el EMM

50 Capítulo 3. Estimación EMM de modelos en tiempo continuo de volatilidad estocástica con saltos en rentabilidad y volatilidad

64 Referencias

INTRODUCCIÓN

Esta tesis estudia las tres características clave de los precios de los activos, liquidez, rentabilidad y riesgo, las cuales forman el conjunto de los tres puntos de referencia en la toma de decisiones de cualquier inversión financiera.

La liquidez, y en concreto, su influencia en la selección de carteras, se analiza en el primer capítulo. Aunque es bien conocido que además del rendimiento esperado y el riesgo, la propia estructura del mercado, y en particular la liquidez, es en sí misma un determinante de los precios de los activos, sorprendentemente, hasta ahora no se ha considerado directamente el impacto de la liquidez en el proceso de formación de la cartera óptima. En esta primera parte de la tesis se cubre este vacío, al extender el marco tradicional media-varianza introduciendo la liquidez como tercera característica.

Los resultados indican un fuerte efecto liquidez en la selección de carteras, tanto al estimar la frontera eficiente media-varianza liquidez, como al estimar directamente la cartera óptima del inversor para distintos niveles de aversión al riesgo y preferencia por la liquidez. Concretamente, el resultado, medido en términos de ratio de Sharpe de la cartera tangente, varía significativamente con la liquidez, y esta relación depende del nivel de liquidez global de mercado. Se encuentran asimismo complejas relaciones simultáneas entre rentabilidad, volatilidad y liquidez que deben tenerse en cuenta a la hora de seleccionar la cartera óptima.

La segunda parte de la tesis está compuesta por los capítulos dos y tres, y trata de analizar la rentabilidad y riesgo de los precios de los activos, pero desde otra perspectiva. Para que las decisiones financieras basadas en un marco en tiempo continuo sean satisfactorias es fundamental que la distribución verdadera del subyacente sea consistente con

la distribución impuesta por el modelo teórico. Para ello se necesitan modelos capaces de captar las regularidades empíricas presentes en las variables financieras, como son la asimetría, la leptocurtosis y la heterocedasticidad condicional. En otras palabras, se necesitan modelos capaces de capturar el comportamiento dinámico de las series financieras. Así, esta segunda parte de la tesis se centra en la identificación y modelización de los factores que conjuntamente determinan el proceso estocástico de los rendimientos de activos. Se considera un modelo de volatilidad variable en el tiempo (volatilidad estocástica) y saltos, en rentabilidad (segundo capítulo) y en volatilidad (tercer capítulo), y analizamos sus efectos en la distribución de rendimientos, examinando sobre todo el ajuste de los momentos de tercer y cuarto orden.

La estimación se lleva a cabo utilizando el método eficiente de momentos EMM, que es un procedimiento de ajuste de momentos basado en simulación especialmente útil en situaciones donde una o más variables son latentes o el proceso incorpora especificaciones de saltos.

Los resultados apoyan la presencia conjunta de los tres factores, no sólo para datos estadounidenses sino también para datos de rendimientos de distintos índices bursátiles europeos, así como para carteras de renta variable, en concreto para tres carteras extremas de las 25 de Fama-French, para las cuales la literatura previa se ha encontrado con dificultades a la hora de explicar su comportamiento. Mientras que la volatilidad estocástica por sí misma no es suficiente para acomodar las singularidades del proceso de rendimientos, con un modelo que incorpore además saltos en rentabilidad se logra reproducir la asimetría y curtosis existente en los datos, siempre y cuando éstos presenten valores no normales pronunciados. Además, sin perder precisión en el ajuste de ambos momentos, la introducción de saltos en volatilidad mejora el ajuste en términos de especificación del modelo, lo que sugiere que con el modelo más complejo se ha logrado capturar mejor el proceso de volatilidad.

CAPÍTULO I: SELECCIÓN DE CARTERAS Y EFECTO LIQUIDEZ

1.1. Introducción

La liquidez es un concepto muy complejo y se refiere a la capacidad de negociar rápidamente cualquier cantidad de un activo sin afectar a su precio. Es por tanto un concepto multidimensional que se caracteriza por dos componentes: precio y cantidad[1], aproximados habitualmente por la horquilla relativa y la profundidad, respectivamente[2].

La liquidez se ha analizado principalmente en un contexto de microestructura, donde uno de los objetivos principales ha sido estudiar cómo las reglas concretas que rigen el funcionamiento de los mercados financieros afectan a la liquidez, y en particular, a la negociación de activos. También se ha analizado la relación entre liquidez y el comportamiento de los precios de los activos. En concreto, una importante línea de investigación, conecta la relación en sección cruzada entre rendimiento esperado y riesgo con temas de microestructura, reconociendo explícitamente el nivel de liquidez en el modelo de valoración de activos. La mayoría de los trabajos emplean la horquilla relativa como medida del nivel de iliquidez, estudiando la existencia de una prima de liquidez en los rendimientos de activos y mostrando que la liquidez es un factor relevante en la valoración de activos. En particular, Amihud y Mendelson (1986) concluyen que los rendimientos esperados de los activos son una función creciente de los costes de iliquidez. Brennan y Subrahmanyam (1996) muestran también un efecto positivo de iliquidez, al utilizar la lambda de Kyle (1985) estimada a partir de datos intra día como aproximación del nivel de liquidez. Una literatura estrechamente relacionada analiza el riesgo de información, en lugar del nivel de liquidez, como

1 Un análisis muy intuitivo y a la vez riguroso de las dos dimensiones de la liquidez puede encontrarse en Lee, Mucklow y Ready (1993). Señalar también que, siguiendo a Kyle (1985), varios autores consideran una tercera dimensión de la liquidez llamada resiliencia, que hace referencia a la rapidez con la que un mercado recupera el nivel inicial de precios después de una orden de tamaño significativo. Existen también al menos dos interesantes estudios sobre liquidez. El artículo de Amihud, Mendelson y Pedersen (2005) que cubre una discusión no solo sobre activos de renta variable, sino también sobre bonos y opciones, y el artículo de Pascual (2003) que analiza temas econométricos clave de la estimación de la liquidez. Además, Biais, Glosten y Spatt (2005) proporcionan un estudio general y relevante en microestructura.

2 Una aplicación empírica de las dos dimensiones para datos españoles puede encontrarse en Martínez, Rubio y Tapia (2005).

determinante de la variación en sección cruzada de los rendimientos de activos. Easley, Hvidkjaer y O'Hara (2002), muestran que el riesgo de información asimétrica afecta a los precios, y O'Hara (2003) argumenta que un modelo de valoración de activos simétrico no funciona porque asume que problemas como la liquidez del subyacente están solucionados. Desarrolla por tanto un modelo con información asimétrica y muestra cómo de importante es la negociación basada en información para explicar los precios de activos en sección cruzada.

Por otro lado, después de detectar la existencia de un factor común de liquidez, es decir, que los *shocks* de liquidez individual covarían significativamente con innovaciones en la liquidez global de mercado, como documentan Chordia, Roll y Subrahmanyam (2000) y Hasbrouck y Seppi (2001), se ha analizado la liquidez como factor de riesgo agregado, estudiando básicamente si la liquidez agregada afecta al factor de descuento estocástico, o en otras palabras, si *shocks* en liquidez agregada conllevan una prima de riesgo[3]. En esta línea, Amihud (2002) y Watanabe y Watanabe (2008), entre otros[4], muestran, para datos estadounidenses, efectos en valoración significativos de la liquidez como factor de riesgo. Por otro lado, Martínez, Nieto, Rubio y Tapia (2005), comparan, para datos españoles, medidas alternativas de riesgo de liquidez agregada. Emplean las medidas de Pastor y Stambaugh (2003), Amihud (2002), y la diferencia entre rendimientos de activos de alta y baja sensibilidad a cambios en sus horquillas relativas. Y muestran que cuando la liquidez agregada se mide como sugiere Amihud (2002), mayores betas (en valor absoluto) relativas a la liquidez implican mayores rendimientos esperados.

Analizando conjuntamente la evidencia empírica anterior, parece razonable concluir que existe una prima de iliquidez positiva en los rendimientos de activos, lo que sugiere que la liquidez afecta a la selección de cartera óptima del inversor. Sorprende sin embargo, la poca atención académica prestada a considerar directamente el impacto de la liquidez en el proceso de formación de la cartera óptima. En este capítulo se cubre este vacío al extender el marco tradicional media-varianza introduciendo

3 Nótese que utilizamos los términos liquidez agregada y liquidez global de mercado para referirnos a *shocks* en liquidez agregada.

4 Pastor y Stambaugh (2003), Acharya y Pedersen (2005), Korajczyk y Sadka (2008), y Márquez, Nieto y Rubio (2009).

la liquidez como tercera característica[5], para analizar la influencia de la liquidez en la selección de carteras desde dos enfoques distintos.

Primero, resolvemos la frontera media-varianza liquidez introduciendo una restricción adicional en el problema de optimización tradicional, en donde no sólo se fija un nivel mínimo de rentabilidad para la cartera óptima, sino que se fija también un nivel de liquidez mínimo para dicha cartera. El segundo enfoque consiste en resolver directamente el problema de cartera óptima del inversor, pero cambiando la función objetivo tradicional al introducir explícitamente la preferencia por la liquidez del inversor en la función objetivo.

1.2. Liquidez: Concepto, Características y Medición

La liquidez del mercado se refiere a la capacidad de un inversor de negociar rápidamente las cantidades deseadas a precios razonables, de acuerdo con las condiciones subyacentes de oferta y demanda. Esto es, un activo es líquido si es posible negociar una gran cantidad del mismo inmediatamente después de que se decida hacerlo a un precio lo más cercano posible a los precios que prevalecen antes y después de la contratación. Así, la liquidez de un activo financiero se asocia con la idea de negociación continuada, a bajos costes, y en grandes volúmenes.

La liquidez es, por tanto, un concepto multidimensional (véase Pascual [2003]; Martínez, Rubio y Tapia [2005]). Un activo será más líquido cuanto menores sean los costes de deshacer posiciones de forma inmediata (costes de inmediatez) y cuanto más podamos negociar sin observar importantes modificaciones en el precio (profundidad).

Los costes de inmediatez se asocian a la horquilla de precios, que es la diferencia entre el precio de venta y el precio de compra que un inversor debe pagar por querer negociar de manera inmediata y simultánea a la compra y a la venta una unidad del activo. Esta diferencia mide la prima (descuento) que hay que soportar por realizar una operación de compra (venta) de forma inmediata. Por tanto, mayor horquilla equivale a menor liquidez.

5 En un trabajo independiente, Lo (2008), muestra recientemente, en el contexto de los fondos de inversión libre, cómo construir las fronteras teniendo en cuenta simultáneamente la rentabilidad, volatilidad y liquidez.

Ahora bien, existe otro componente que está relacionado con la cantidad. Los costes de liquidez o inmediatez en términos relativos dependen del tamaño de la operación, lo que implica que no existe un único diferencial de precios u horquilla representativo de los costes de liquidez, sino que cada tamaño de la operación puede definir una horquilla de precios diferente. De este modo, el segundo componente asociado al concepto liquidez es la profundidad, entendiendo que un activo es más profundo cuantas más posiciones compradoras y vendedoras existan en cualquier momento, teniendo en cuenta además la amplitud o tamaño de dichas cantidades compradoras y vendedoras. Así, la profundidad es conocida como la capacidad del mercado para acomodar grandes volúmenes de negociación sin provocar grandes variaciones en el precio. Por tanto, mayor profundidad implica mayor liquidez.

En definitiva, la liquidez es un concepto que se caracteriza simultáneamente mediante dos componentes: la horquilla y la profundidad. Es necesario incluir ambos componentes en el concepto de liquidez, y es que intentar medirlo o caracterizarlo exclusivamente con uno de ellos puede conducir a conclusiones erróneas, ya que si los costes de inmediatez y la profundidad se mueven en una misma dirección, el cambio en liquidez es incierto. Sin embargo, el estudio empírico sobre la liquidez se ha centrado en gran parte en el análisis del comportamiento y determinantes de los costes de inmediatez sin considerar la dimensión de la profundidad, componente que no ha despertado el interés de la investigación empírica hasta fechas muy recientes.

En la literatura existe un gran número de medidas de liquidez que intentan recoger este concepto. A pesar de su carácter unidimensional la horquilla relativa es la más utilizada, pero, aunque es muy intuitiva, sufre de limitaciones comunes a todas las medidas de costes de inmediatez. No recoge los costes de inmediatez para órdenes "agresivas" (órdenes que superan el número de acciones ofrecidas a los mejores precios de compra o venta), y está sujeta a fricciones impuestas por la estructura y regulación del propio mercado. Pero la crítica más importante es que por sí misma no es suficiente para determinar si se ha producido un cambio general de liquidez, ya que no tiene en cuenta la dimensión de la profundidad.

La medida de liquidez diaria que utilizamos es la introducida por Amihud (2002) para medir la iliquidez de un activo financiero. Se calcula como el ratio diario del rendimiento absoluto sobre el volumen en euros, proporcionando el porcentaje de la variación absoluta en el precio por cada euro de volumen diario negociado. En efecto, para cada activo *i* y día *d*, la iliquidez del activo se define como,

$$Amihud_{i,d} = \frac{|R_{i,d}|}{Vol_{i,d}} \qquad (1.1)$$

donde $R_{i,d}$ es la rentabilidad diaria y $Vol_{i,d}$ es el volumen (en euros) diario negociado[6].

La iliquidez diaria se agrega a través de todos los días de cada mes del periodo muestral para obtener una medida de iliquidez individual para cada activo en el mes *t*,

$$Amihud_{i,t} = \frac{1}{D_{i,t}} \sum_{d=1}^{D_{i,t}} Amihud_{i,d} \qquad (1.2)$$

donde $D_{i,d}$ es el número de días para los que se dispone de datos del activo *i* en el mes *t*.

Este ratio ha sido utilizado por Amihud (2002), Acharya y Pedersen (2005), Korajczyk y Sadka (2008), Kamara, Lou y Sadka (2008), Watanabe y Watanabe (2008), y Márquez, Nieto y Rubio (2009), entre otros. La principal ventaja de dicha medida es que se calcula fácilmente utilizando datos diarios durante amplios periodos de tiempo. Además, existen varias razones que hacen la hacen atractiva. Captura de forma sencilla el impacto en el precio como respuesta a un euro de volumen negociado, incorporando en cierta forma el aspecto bidimensional de la liquidez. Es también una buena aproximación a la lambda de Kyle (1985) con la ventaja de que los datos son fácilmente disponibles. Así mismo, es importante señalar que Hasbrouck (2009) encuentra que, al menos para datos estadounidenses, dicha medida parece ser, de entre las aproximaciones habituales, la que mejor captura la lambda de Kyle. Por otro lado, en los

6 En realidad multiplicamos por 10^6 el ratio de Amihud diario, para obtener magnitudes más manejables.

contrastes empíricos usando medidas alternativas de liquidez agregada con datos españoles, Martínez, Nieto, Rubio y Tapia (2005) obtienen que el ratio de Amihud es la medida que mejor funciona para explicar rendimientos medios. Estos autores concluyen que el riesgo de liquidez sistemático se valora significativamente en España, pero únicamente cuando se considera la iliquidez de Amihud como factor de riesgo.

Utilizando el total de S activos disponibles, obtenemos la iliquidez global de mercado como la media en sección cruzada de la expresión (1.1) para cada día d del periodo muestral[7],

$$Amihud_{m,d} = \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{S} Amihud_{i,d} \qquad (1.3)$$

1.3. Datos

Empleamos datos de rentabilidades diarias de 116 activos negociados en el mercado continuo español en algún momento entre enero de 1991 y diciembre de 2004. También se dispone del volumen negociado en euros diario, necesario para calcular la iliquidez de Amihud diaria (1.1), mensual (1.2)[8], y global de mercado (1.3).

Con el objetivo de trabajar con una muestra lo más representativa posible del mercado español, empleamos el máximo número de activos posible negociados durante el periodo muestral considerado, para a continuación, construir mes a mes 30 carteras ordenadas por nivel de liquidez con los activos disponibles ese mes. En todo momento se dispone de suficientes activos para que cada cartera esté formada con al menos dos activos. Además, nos aseguramos de que, en la medida de lo posible, todas tengan el mismo número de activos y, si esto no es posible, las carteras más y menos líquidas (las extremas) tendrán uno más, para evitar los valores extremos de liquidez. Calculamos a continuación las rentabilidades mensuales equiponderadas de las 30 carteras. De forma

7 Esta forma de agregar para obtener una medida representativa de la iliquidez global de mercado es muy común en la literatura. Véase Amihud (2002), y Watanabe y Watanabe (2008), entre otros.

8 Para calcular la iliquidez mensual de un activo y por tanto, para incluir dicho activo en la muestra, exigimos al menos 10 datos de iliquidez de Amihud diaria (aproximadamente la mitad del número de días de negociación).

análoga, con el propósito de examinar la robustez de los resultados empíricos, empleamos también 15 carteras ordenadas por liquidez. Así, los rendimientos mensuales de estos dos conjuntos de carteras son los que utilizamos más adelante en los ejercicios de optimización. El tipo de interés mensual de la letra del Tesoro a 1 año observado en el mercado secundario es el utilizado como tipo de interés libre de riesgo al emplear datos con frecuencia mensual.

Se utiliza como índice de mercado la cartera de mercado equiponderada a través de todos los activos, ya que la infravaloración del riesgo beta es potencialmente más importante en aquellos mercados bursátiles donde la frecuencia y volumen de contratación está centrado en un número relativamente pequeño de empresas, como es el caso del mercado bursátil español.

La beta de iliquidez con respecto a la rentabilidad se obtiene de estimar, para cada cartera, la siguiente regresión con datos mensuales para todo el periodo entre enero de 1991 y diciembre de 2004,

$$R_{c,t} = \alpha_c + \beta_c^{iliq} \Delta Amihud_{m,t} + \varepsilon_{c,t} \qquad (1.4)$$

donde $R_{c,t}$ es el rendimiento mensual de la cartera c en el mes t, y $\Delta Amihud_{m,t}$ es la tasa de variación de iliquidez agregada mensual durante el mes t. Como era de esperar, dadas las implicaciones económicas del factor de iliquidez global de mercado, obtenemos betas negativas y significativas para todas las carteras. Por tanto, *shocks* adversos en iliquidez afectan negativamente a la rentabilidad de las carteras. Además, el coeficiente de correlación positivo entre betas de iliquidez y nivel de iliquidez obtenido para los dos conjuntos de carteras, sugiere que este efecto es más pronunciado cuanto más líquida es la cartera. Por otro lado, las carteras más ilíquidas tienen mayores betas con respecto al mercado. Como es lógico, una mayor iliquidez viene acompañado de un menor volumen negociado. Sin embargo, sorprendentemente, observamos que las carteras con mayor liquidez son las que mayores rendimientos experimentan. Además, esta relación negativa (positiva) entre iliquidez (liquidez) y rentabilidad (las muy ilíquidas presentan en media, al menos durante nuestro periodo muestral, menor rentabilidad)

sigue apareciendo si medimos iliquidez como iliquidez sistemática[9] y construimos las carteras según dicha sensibilidad beta en lugar de iliquidez idiosincrásica[10]. Parece por tanto que este resultado es una caracterización de la Bolsa Española. Además, vemos cómo las carteras más líquidas presentan en general asimetría negativa, mientras que las más ilíquidas tienen valores positivos de asimetría[11]. Finalmente, tal y como era de esperar, la correlación entre iliquidez y volatilidad es positiva. Al dividir la muestra en tres grupos por iliquidez observamos de nuevo que, en contra de lo a priori esperado, una mayor liquidez viene acompañada de una mayor rentabilidad media[12]. Sin embargo, el mayor ratio de Sharpe corresponde a la cartera de activos de liquidez media, ya que en media, dicha cartera presenta una volatilidad mucho menor que la cartera de activos más líquidos, compensando el alto rendimiento promedio de estos últimos. Destaca el hecho de que el menor ratio de Sharpe corresponda a la cartera de activos más ilíquidos. Esto puede tener relación con la asimetría positiva obtenida anteriormente para estos activos, ya que en media, los inversores no parecen exigir una prima especialmente alta por unidad de riesgo. A continuación se forman tres carteras según su nivel de rentabilidad o volatilidad, y de la intersección de éstas se obtienen 9 carteras, para las que calculamos la iliquidez de Amihud promedio. De nuevo, la relación entre rentabilidad y liquidez es positiva. Más aún, independientemente del nivel de volatilidad, las carteras con menores rendimientos promedio son altamente ilíquidas, mientras que las carteras con alto rendimiento promedio presentan bajos niveles de iliquidez. Las carteras con mayor volatilidad y menor rendimiento promedio están formadas con los activos más ilíquidos de la muestra. Finalmente, se analiza la rentabilidad promedio de 9 carteras basadas en la intersección de las 30 (15) carteras ordenadas (por separado) por iliquidez promedio y volatilidad. Los resultados confirman nuestra evidencia empírica inicial. Independientemente del nivel de volatilidad, los activos más líquidos son los que presentan mayores rendimientos.

9 La iliquidez sistemática es una beta de iliquidez que se obtiene de estimar la regresión de variación mensual de iliquidez individual en la variación mensual de iliquidez global de mercado.

10 Obtenemos la misma relación negativa al considerar como medida de iliquidez tanto la horquilla relativa como el ratio de Amihud, pero considerando un periodo temporal más reducido, entre enero de 1996 y diciembre de 2000, y utilizando únicamente 29 activos.

11 Este es un resultado muy interesante que merece ser analizado en profundidad en el futuro. Señalar que la asimetría y curtosis se han calculado a partir de las rentabilidades diarias de las 30 y 15 carteras. Si utilizamos rendimientos mensuales, los signos de las correlaciones se mantienen a excepción de la curtosis, para la que se obtiene una correlación positiva con respecto a la iliquidez.

12 Es importante señalar que durante los noventa el efecto tamaño en España cambió sorprendentemente de signo, y que los activos más líquidos son también los de mayor capitalización.

1.4. Frontera Media-Varianza Liquidez

En esta sección, obtenemos la frontera de varianza mínima imponiendo no sólo la restricción tradicional en rendimiento medio, sino también una restricción adicional en donde se fija un nivel de liquidez mínimo para la cartera, obteniendo la frontera media-varianza liquidez al resolver el siguiente problema de optimización:

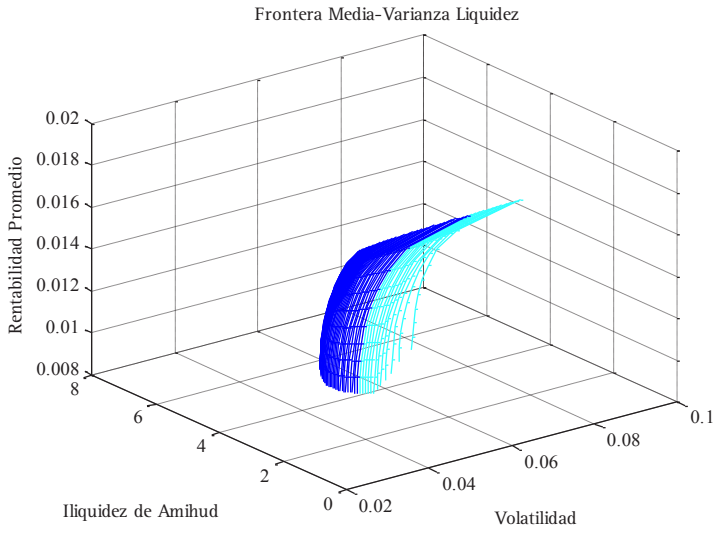
$$\min_{\omega} \frac{1}{2}\omega' V\omega \quad sujeto\ a \begin{cases} \omega'\mu = \mu_c \\ \omega' Amihud = Amihud_c \\ \omega' 1_N = 1 \\ \omega \geq 0 \end{cases} \qquad (1.5)$$

donde V es la matriz de varianzas y covarianzas NxN de los rendimientos mensuales de las carteras, μ es el N-vector de rendimientos mensuales promedio, $Amihud$ es el N-vector de iliquidez mensual medida como ratio de Amihud, μ_c y $Amihud_c$ son los niveles de rentabilidad promedio e iliquidez requeridos para la cartera de varianza mínima, y μ son las ponderaciones no negativas para cada cartera. Resolvemos este problema para las N = 30 y N = 15 carteras ordenadas por nivel de iliquidez.

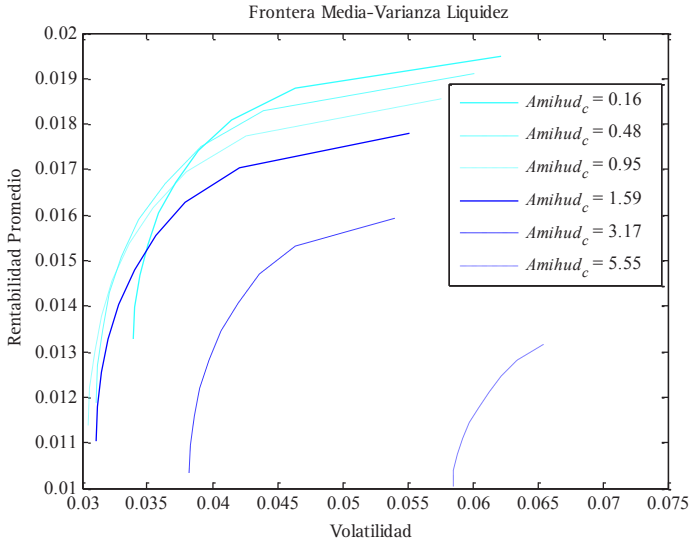
La Figura 1.1 muestra, para las 30 carteras, la frontera media-varianza liquidez en tres dimensiones (Panel A) y la frontera media-varianza para distintos niveles de liquidez (Panel B). Para niveles altos de liquidez el comportamiento de la frontera eficiente en términos de la rentabilidad, depende no solo de la iliquidez sino también de la volatilidad. Para niveles de volatilidad bajos (en azul claro), se mueve de la forma esperada, es decir, una mayor iliquidez trae consigo una mayor rentabilidad, pero no es así para niveles de volatilidad altos (en azul oscuro), ya que entonces una mayor iliquidez implica una menor rentabilidad. Esto mismo ocurre para niveles bajos de liquidez: la frontera se mueve en la dirección opuesta a la esperada.

Figura I.I: Frontera Media-Varianza Liquidez (30 carteras)

Panel A



Panel B



Estos resultados sugieren que es importante considerar simultáneamente la interacción entre rentabilidad, volatilidad y liquidez. Éste es un interesante resultado que implica que la liquidez juega un papel determinante en la selección de carteras.

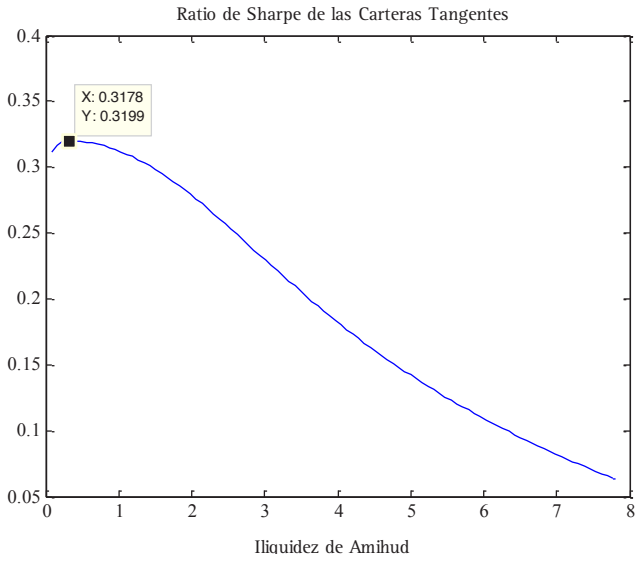
Con el fin de precisar un poco más, calculamos la cartera tangente para cada frontera eficiente dado un nivel de liquidez. Para ello, resolvemos el siguiente problema de optimización en donde se maximiza el ratio de Sharpe:

$$\max_{\omega} \frac{\mu_c - r_f}{\sigma_c} \quad sujeto\ a \begin{cases} \omega'\mu + (1 - \omega' 1_N) r_f = \mu_c \\ \sqrt{\omega' V \omega} = \sigma_c \\ \omega' Amihud = Amihud_c \\ \omega' 1_N = 1 \end{cases} \tag{1.6}$$

donde r_f es el tipo de interés libre de riesgo mensual y σ_c es la volatilidad de la cartera.

Los resultados mostrados en la Figura 1.2 son consistentes con nuestra discusión anterior. Sólo para niveles de liquidez muy altos (valores bajos de ratio de Amihud), el ratio de Sharpe aumenta con la iliquidez, de forma que el comportamiento de la cartera tangente es mejor en media cuanto mayor es el nivel de iliquidez impuesto. En otras palabras, la iliquidez incorpora una prima en rendimiento por unidad de riesgo. Sin embargo, se obtiene el resultado opuesto cuando la iliquidez toma valores no tan bajos. De hecho, en la mayoría de los casos, el ratio de Sharpe decrece con el nivel de iliquidez, resultado que parece ser característico del mercado español.

Figura I.2: Ratio de Sharpe para distintos niveles de Liquidez (30 carteras)



1.5. Carteras Óptimas: Aversión al Riesgo y Preferencia por la Liquidez

Resolvemos el problema de cartera del inversor introduciendo explícitamente la aversión al riesgo y la preferencia por la liquidez en la función objetivo[13],

$$\max_{\omega} \mu_c - \frac{\gamma}{2}\sigma_c^2 + \eta \frac{1}{Amihud_c} \Leftrightarrow \max_{\omega} \omega'\mu - \frac{\gamma}{2}\omega' V \omega + \eta \frac{1}{Amihud_c} \quad s.a. \begin{cases} \omega' 1_N = 1 \\ \omega \geq 0 \end{cases} \qquad (1.7)$$

donde $\gamma > 0$ es el parámetro de aversión al riesgo y $\eta \geq 0$ representa la preferencia por la liquidez. Resolvemos el problema anterior para distintos valores γ de y η. En particular, la aversión al riesgo toma valores dentro del conjunto $\gamma \in \{1, 2, 2.188, 4, 5, 10, 20\}$[14]. Permitimos también valores extremos para γ, como son $\gamma = 10$ y $\gamma = 20$, para ver el comportamiento de la cartera óptima en estos casos extremos. Por otro lado,

13 Dicha función objetivo se obtiene si consideramos una función de utilidad exponencial negativa *CARA* y suponiendo normalidad en los rendimientos.

14 El valor 2.188 es la aversión al riesgo estimada por León, Nave y Rubio (2007) para el mercado de valores español entre enero de 1988 y diciembre de 2004.

$\eta \in \{0, 5\times10^{-6}, 5\times10^{-5}, 5\times10^{-4}, 5\times10^{-3}\}$. Por supuesto, cuando $\eta = 0$, el problema (1.7) se reduce al problema tradicional media-varianza.

Se obtienen resultados muy similares para todo valor de η distinto de cero, por lo que nos centramos en comparar el caso tradicional $\eta = 0$, en donde el inversor es indiferente a la liquidez, con respecto al caso $\eta > 0$, en donde el inversor muestra preferencia por la liquidez. En particular, se analizan cuatro características, las relaciones entre rentabilidad, volatilidad, iliquidez y ratio de Sharpe de las carteras óptimas, en función de la aversión al riesgo y para dos niveles alternativos de preferencia por la liquidez, $\eta = 0$ y $\eta > 0$.

Como era de esperar e independientemente de la preferencia por la liquidez, tanto la rentabilidad promedio como la volatilidad es decreciente según aumenta la aversión al riesgo, sugiriendo que, a medida que la aversión al riesgo es más importante, la cartera óptima es menos arriesgada y, en consecuencia, la rentabilidad se ve negativamente afectada. Cuando no se introduce la preferencia por la liquidez, $\eta = 0$, vemos que, salvo para niveles bajos del coeficiente de aversión al riesgo (menor que 1.5 para $N = 30$ y menor que 4.5 para $N = 15$), las carteras óptimas tienen menores rendimientos promedio que en el caso $\eta > 0$. Asimismo, independientemente de la aversión al riesgo, las carteras óptimas son siempre más volátiles cuando se introduce la preferencia por la liquidez, y esta mayor volatilidad se compensa con un mayor rendimiento promedio sólo cuando la aversión al riesgo es lo suficientemente alta. Por otro lado, en el caso $\eta = 0$ el inversor está dispuesto a aceptar carteras óptimas más ilíquidas, y esto independientemente de la aversión al riesgo.

Finalmente, los resultados relativos al ratio de Sharpe de las carteras óptimas indican, para valores de aversión al riesgo razonables, $\gamma < 10$, un mayor ratio de Sharpe de la cartera óptima cuando el inversor no muestra preferencia por la liquidez. Esta diferencia es además muy pronunciada en el caso de las 15 carteras ($N = 15$), en donde observamos que el ratio de Sharpe es un 20% más bajo para $\eta > 0$. Por supuesto, este resultado favorable en términos de media-varianza cuando $\eta = 0$ viene acompañado por niveles de liquidez menores en las correspondientes carteras óptimas. De hecho, cuando $\eta = 0$ y $N = 30$ ($N = 15$), la liquidez

de las carteras óptimas es un 50% (88%) menor para valores de aversión al riesgo menores que 5, que son precisamente los niveles de aversión al riesgo próximos a las estimaciones empíricas usuales recogidas en la literatura, y aunque los porcentajes no son tan altos para $\gamma \geq 5$, las carteras óptimas siguen siendo más líquidas cuando se introduce la preferencia por la liquidez. Parece entonces que el inversor está dispuesto a aceptar menores rendimientos por unidad de riesgo (menor ratio de Sharpe) para tener mayor liquidez.

1.6. Iliquidez Agregada

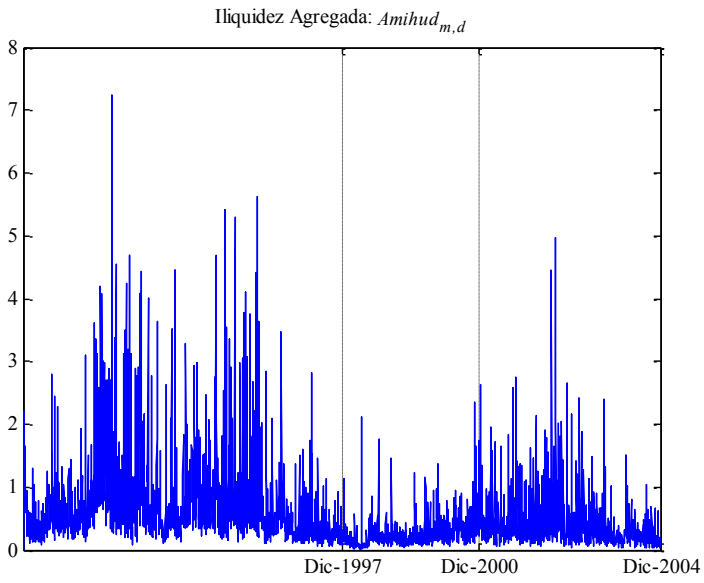
Tal y como se ha destacado anteriormente en la introducción, es aceptado en la literatura que la liquidez de los activos financieros varía en el tiempo, y que dichas variaciones temporales están gobernadas por un significativo componente común en la liquidez de los activos. En esta sección, queremos examinar dicho componente común de liquidez y, en particular, investigar, para el caso español, la evolución de la iliquidez sistemática en sección cruzada para los activos disponibles a lo largo de nuestro periodo muestral, comprendido entre enero de 1991 y diciembre de 2004. La iliquidez sistemática se define como la sensibilidad de la iliquidez individual de un activo con respecto a la iliquidez global de mercado. Recientemente, Kamara, Lou y Sadka (2008) demuestran que la iliquidez sistemática ha disminuido en los últimos años para las empresas de pequeña capitalización y aumentado para las de gran capitalización, por lo que estas últimas están más sometidas a riesgo de iliquidez. Esto implica que ha disminuido la habilidad de diversificar los *shocks* adversos de liquidez agregada tomando activos grandes, de manera que el mercado estadounidense se muestra más frágil ante *shocks* inesperados del crédito y/o de la liquidez agregada. Dada la importancia de esta cuestión, y antes de analizar los efectos de la iliquidez global de mercado en las decisiones de cartera, estudiamos la evolución temporal de la iliquidez sistemática para nuestra muestra de activos.

Dada la no estacionariedad de las series temporales del ratio de Amihud, utilizamos la diferencia diaria en logaritmos para aproximar la tasa de variación de iliquidez individual del activo *i*:

$$\Delta Amihud_{i,d} = \log\left(Amihud_{i,d} / Amihud_{i,d-1}\right) \qquad (1.8)$$

Siguiendo a Chordia, Roll y Subrahmanyam (2000), y Amihud (2002), se descartan los datos diarios de aquellos activos cuya $\Delta Amihud_{i,d}$ esté en los percentiles 1% y 99% (se descartan los *outliers*). La tasa de variación de la iliquidez global de mercado, $\Delta Amihud_{m,d}$, se define como la media equiponderada de $\Delta Amihud_{i,d}$ a través de todos los activos. La Figura 1.3 reproduce la iliquidez global de mercado. Como era de esperar, se observa una reducción notable (un aumento de la liquidez global de mercado) desde mediados de los noventa hasta el año 2000, así como desde 2002 hasta el final del periodo muestral. La tasa de variación diaria de iliquidez de mercado no muestra tendencia alguna. Esto es importante que sea así para que los resultados posteriores respecto a la tendencia de las series temporales de iliquidez sistemática no sean consecuencia de la tendencia temporal de la medida $\Delta Amihud_{m,d}$. Sin embargo, se observa que la volatilidad de $\Delta Amihud_{m,d}$ disminuye considerablemente durante la segunda parte del periodo muestral.

Figura 1.3: Nivel de Iliquidez Agregada $\Delta Amihud_{m,d}$



Cada año de la muestra, estimamos, con datos diarios, la siguiente regresión para cada activo *i*:

$$\Delta Amihud_{i,d} = \alpha_i + \beta_i \Delta Amihud_{m,d} + \varepsilon_{i,d} \qquad (1.9)$$

donde β_i mide la sensibilidad de la variación de la iliquidez del activo *i* a cambios en la iliquidez global de mercado o iliquidez sistemática[15].

Utilizando todos los activos disponibles, construimos, cada año entre 1991 y 2004, cinco carteras ordenadas por volumen. La Cartera 1 (*pequeña*) contiene los activos de menor negociación, mientras que la Cartera 5 (*grande*) se construye a partir de las empresas con mayor volumen de negociación. Para estas dos carteras extremas, obtenemos, cada año, la iliquidez sistemática promedio, calculada como la media equiponderada de las betas individuales estimadas a partir de la expresión (1.9). Al analizar la evolución temporal de las dos series de betas de iliquidez sistemática, así como la diferencia entre ambas, da la sensación de que a partir de 1999, hay una cierta tendencia hacia una mayor sensibilidad a *shocks* en iliquidez global de mercado, de los activos de mayor volumen (*grande*). Es cuanto menos sorprendente que precisamente en ese periodo caracterizado por alta liquidez agregada en todo el mundo, las empresas más grandes estén sometidas a mayor riesgo de iliquidez global de mercado.

Finalmente, dada la importante reducción de la volatilidad de la tasa de variación de la iliquidez global de mercado, calculamos la iliquidez sistemática para todos los activos de la muestra, así como para las carteras *pequeña* y *grande*, en dos sub-periodos, desde 1991 a 1997 y desde 1998 a 2004. Los resultados indican que en efecto, la volatilidad de $\Delta Amihud_{m,d}$ disminuye de 0.43 a 0.29 de un sub-periodo a otro. Destaca también la importante reducción observada del factor común de liquidez durante la segunda parte del periodo muestral. Parece que la volatilidad de los *shocks* de iliquidez agregada es tan baja durante el segundo sub-periodo, que la variación de iliquidez a través de todos los activos y la variación de iliquidez de las dos carteras extremas, no son sensibles a

15 Cada año consideramos aquellos activos para los que se dispone de al menos 100 datos diarios de tasa de variación de iliquidez individual $\Delta Amihud_{i,d}$.

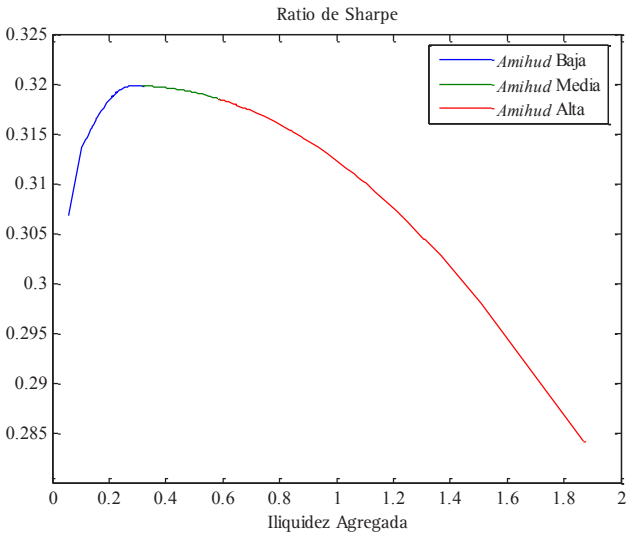
los (relativamente pequeños) cambios producidos en iliquidez global de mercado. Esto sugiere que el incremento observado al final del periodo muestral para la diferencia de iliquidez sistemática entre las carteras *grande* y *pequeña*, puede no ser económicamente relevante.

Dada la relevancia empírica de la liquidez como factor de riesgo en la reciente literatura de valoración de activos y dada la evolución de la iliquidez sistemática, analizamos a continuación el resultado en términos de ratio de Sharpe de la cartera tangente para distintos niveles de liquidez agregada. Dividimos la iliquidez global de mercado en tres periodos dependiendo del nivel de iliquidez agregada, resolviendo a continuación el problema de optimización media-varianza liquidez dado por la expresión (1.6) para cada uno de los tres sub-periodos por separado. Los resultados se muestran en la Figura 1.4.

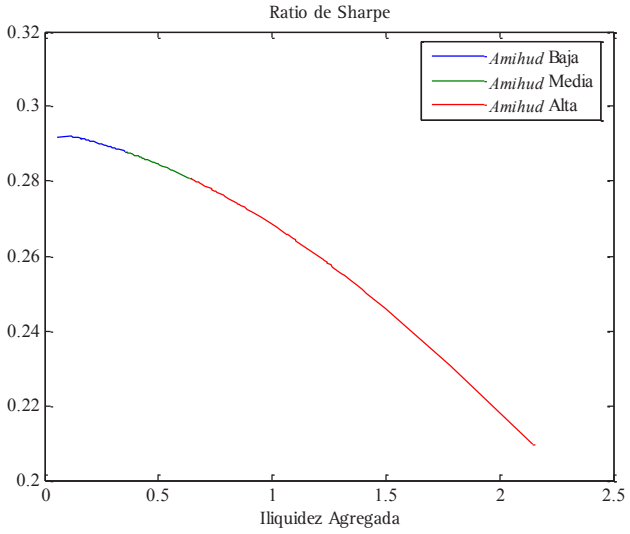
Vemos que la liquidez global de mercado juega un papel clave en la relación simultánea entre rentabilidad, volatilidad y liquidez. De nuevo, el ratio de Sharpe disminuye según aumenta la iliquidez global del mercado. Sin embargo, en el caso $N = 30$ observamos que el ratio de Sharpe aumenta monótonamente con la iliquidez siempre y cuando el nivel de iliquidez (liquidez) agregada en el mercado sea lo suficientemente bajo (alto). En este caso, para niveles altos de liquidez global de mercado, parece que un aumento en iliquidez se compensa con un mayor ratio de Sharpe o un mejor resultado promedio. Esto sugiere que las inesperadas relaciones obtenidas anteriormente entre liquidez y rentabilidad y entre liquidez y ratio de Sharpe pueden depender del nivel de liquidez global de mercado. Y es que, al menos entre 1991 y 2004, la prima de iliquidez, dada como el ratio de Sharpe, se genera siempre y cuando la liquidez global del mercado sea lo suficientemente alta. Por desgracia, este, en teoría, atractivo resultado no se da para todo valor de liquidez global de mercado.

Figura I.4: Ratio de Sharpe para distintos niveles de Iliquidez Agregada

30 carteras



15 carteras



1.7. Conclusiones

Este capítulo muestra un fuerte efecto liquidez en la selección de carteras. Se encuentran asimismo complejas relaciones simultáneas entre rentabilidad, volatilidad y liquidez que deben tenerse en cuenta a la hora de seleccionar la cartera óptima.

Además, el ratio de Sharpe de la cartera tangente varía significativamente con la liquidez, y esta relación depende del nivel de liquidez global de mercado. Mientras que la liquidez agregada sea lo suficientemente alta el ratio de Sharpe aumenta con la iliquidez, sugiriendo que en promedio, existe una prima de iliquidez en las decisiones de cartera.

Finalmente, cuando el inversor no muestra preferencia por la liquidez el resultado de la cartera óptima es más favorable (mayor ratio de Sharpe), al menos para coeficientes de aversión al riesgo menores que 10. Sin embargo, la cartera es mucho menos líquida.

CAPÍTULO 2: ANÁLISIS EMPÍRICO DE LA VOLATILIDAD ESTOCÁSTICA Y SALTOS PARA MODELOS EN TIEMPO CONTINUO DE ÍNDICES BURSÁTILES UTILIZANDO EL EMM

2.1. Introducción

El éxito alcanzado en los últimos treinta años al utilizar modelos de difusión simples para aproximar el proceso estocástico de los rendimientos de activos financieros no tiene precedentes. Sin embargo, las llamadas *sonrisas de volatilidad* calculadas al utilizar la volatilidad implícita del venerado modelo de Black-Scholes revelan que un simple proceso geométrico Browniano no es suficiente para capturar algunas características importantes de los datos. Además, la evidencia empírica sugiere que las decisiones financieras basadas en un marco en tiempo continuo serán satisfactorias sólo si se construye sobre especificaciones razonables del proceso de rendimientos del activo subyacente. En otras palabras, es fundamental que la distribución verdadera del subyacente sea consistente con la distribución impuesta por el modelo teórico.

Datos de rendimientos de alta frecuencia muestran exceso de curtosis (distribuciones de colas anchas; leptocurtosis), asimetría, efecto apalancamiento y agrupamiento de la volatilidad. Capturar estas singularidades esenciales con un modelo paramétrico parsimonioso y a la vez tratable es complicado. Es aceptado en la literatura que la introducción de volatilidad estocástica o saltos puede explicar estas características de los rendimientos de activos, pero los resultados para datos estadounidenses son contradictorios, y muchas veces fracasan a la hora de ajustar satisfactoriamente la dinámica del proceso de rendimientos del activo subyacente.

Andersen, Benzoni y Lund (2002), Chernov, Gallant, Ghysels y Tauchen (2003) y Eraker, Johannes y Polson (2003) estiman modelos con volatilidad estocástica, saltos en precios y, en los dos últimos, saltos en

volatilidad. Todos ellos encuentran fuerte evidencia empírica de la presencia de volatilidad estocástica y saltos en precios, pero no coinciden respecto a la presencia e importancia de saltos en volatilidad.

Existe un desacuerdo similar respecto a la especificación entre los estudios que utilizan, en lugar de series temporales de rendimientos del subyacente, datos de precios de opciones. En este caso, la especificación se evalúa mediante ajuste de precios de opciones, frente al ajuste de la distribución condicional de las series temporales. Bakshi, Cao y Chen (1997) concluyen que además de la volatilidad estocástica, los saltos en precios son fundamentales, pero Bates (2000), Eraker (2004) y Pan (2002) dicen que éstos son económicamente pequeños y que sus beneficios son insignificantes.

En este capítulo estimamos para datos diarios de rentabilidades del S&P 500, entre 1986 y 2005, del DAX 30, del IBEX 35 y del CAC 40, estos últimos entre 1998 y 2003, un modelo en tiempo continuo de difusión para la volatilidad estocástica con y sin saltos en rentabilidad, y analizamos los resultados sobre todo examinando la forma de la distribución de rendimientos, en particular, los momentos de tercer y cuarto orden. Es sorprendente la falta de literatura que analice el comportamiento de modelos en tiempo continuo para índices europeos, a pesar de su relevancia en la selección de carteras o en valoración de derivados. Este segundo capítulo cubre este vacío.

Hasta no hace mucho, el mayor obstáculo en el desarrollo de esta literatura era la falta de técnicas factibles para la estimación e inferencia de modelos generales en tiempo continuo utilizando observaciones discretas.

La mayor dificultad a la hora de llevar a cabo una inferencia eficiente para un modelo en tiempo continuo a partir de datos muestrales discretos, es que generalmente no suelen estar disponibles expresiones cerradas para la densidad de transición discreta, especialmente en presencia de variables de estado no observadas y serialmente correladas. Este último es el caso más usual, por ejemplo, para modelos de volatilidad estocástica.

La necesidad de un marco general eficiente para la inferencia nos lleva a adoptar una variante del método simulado de momentos SMM (*Simulated Method of Moments*) de Duffie y Singleton (1993), que junto al estimador bayesiano MCMC (*Markov Chain Monte Carlo*), dominan al resto de metodologías, en tratabilidad y eficiencia econométrica, especialmente en situaciones en donde una o más variables son latentes o el proceso incorpora especificaciones de saltos.

El SMM iguala los momentos muestrales a los momentos simulados obtenidos a partir de largas series simuladas usando el mecanismo generador de datos asumido (modelo estructural). Nosotros empleamos el método de momentos eficiente EMM (*Efficient Method of Moments*) propuesto por Bansal et al. (1993, 1995) y desarrollado por Gallant y Tauchen (1996). El EMM es un procedimiento de ajuste de momentos basado en simulación pero con ciertas ventajas. Refina el enfoque SMM dando una receta específica para la generación de condiciones de momentos. Éstos se obtienen de la expectativa del gradiente de la verosimilitud de un modelo semi-no-paramétrico auxiliar, SNP, en tiempo discreto que se aproxima a la distribución de los datos de la muestra discreta, donde el gradiente de la verosimilitud no es más que la primera derivada de la función de log-verosimilitud con respecto a los parámetros del modelo auxiliar. Los momentos ajustados son por tanto los elementos del gradiente de la verosimilitud de un modelo auxiliar. Si este modelo auxiliar aproxima bien la distribución de los datos, entonces, las estimaciones de los parámetros del modelo estructural son eficientes como si se hubiera empleado máxima-verosimilitud[16]. Las densidades SNP son buenas candidatas para este propósito y básicamente consisten en utilizar una densidad gaussiana como término principal al que se añade una expansión polinómica para recoger las características no gaussianas del proceso. Debido a la sofisticación de este último término, en este capítulo consideramos primero un modelo auxiliar más sencillo (en particular, un GARCH(1,1), que es únicamente gaussiano, aunque dentro de la familia SNP) obteniendo unas estimaciones iniciales para los modelos de volatilidad estocástica con y sin saltos en rentabilidad, que nos servirán de referencia en las estimaciones al extender mediante polinomios el modelo auxiliar.

16 Véase Tauchen (1997[a]) y Gallant y Long (1997).

2.2. Modelos

2.2.1. Modelo de Volatilidad Estocástica SV

El agrupamiento de la volatilidad es una característica importante de los datos. La volatilidad estocástica es una extensión natural de los modelos de difusión ampliamente utilizados en la literatura de valoración de activos. Hull y White (1987), Melino y Turnbull (1990), Wiggins (1987) entre otros, generalizan la tradicional especificación del movimiento Browniano geométrico sugiriendo un proceso propio para la volatilidad estocástica. Así, Heston (1993), en una contribución clave para la literatura de valoración de opciones admite, a diferencia de los anteriores, la correlación entre los Brownianos del subyacente y la varianza[17].

Denotamos S_t el precio en el instante t de un índice bursátil y consideramos el siguiente modelo de volatilidad estocástica en raíz cuadrada, SV:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sqrt{V_t}\, dW_{1,t} \qquad (2.1)$$

donde el proceso de varianza V sigue un proceso de difusión con reversión a la media:

$$dV_t = (\alpha - \beta V_t)dt + \eta\sqrt{V_t}\, dW_{2,t} \qquad (2.2)$$

Los factores W_1 y W_2 son movimientos Brownianos estándar con correlación $\operatorname{cov}(dW_{1,t}, dW_{2,t}) = \rho dt$. Así, los parámetros a estimar son $\psi = (\mu, \alpha, \beta, \eta, \rho)$.

La volatilidad estocástica induce exceso de curtosis gobernada en su mayor parte por los parámetros de volatilidad α, β y η. Más concretamente, el exceso de curtosis se genera por la volatilidad de la varianza, η. Si la varianza es muy volátil la probabilidad de observar grandes *shocks* en rendimientos aumenta, aumentando así la anchura en las colas de

17 Además de obtener expresiones de valoración de opciones mediante la inversión de Fourier de la función característica condicional.

la distribución. β es la velocidad con la que el proceso revierte a la varianza de largo plazo (α/β), y captura la persistencia en varianza. La asimetría que generalmente se observa en el proceso de rendimientos se puede capturar mediante una correlación negativa entre *shocks* en la varianza y el proceso de rendimientos, es decir, $\rho < 0$, ya que en este caso la volatilidad aumenta cuando los precios disminuyen, lo que hace más probable que se produzcan grandes rendimientos negativos.

2.2.2. Modelo de Volatilidad Estocástica con Saltos SVJ

La reciente literatura sugiere que dado un ajuste razonable de la dinámica de la volatilidad condicional, los modelos de volatilidad estocástica no pueden ajustar la alta curtosis condicional de los rendimientos (colas anchas) documentada en la literatura para muchas clases de activos financieros.

Extendemos por tanto la especificación anterior añadiendo un componente salto:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sqrt{V_t}\, dW_{1,t} + k(t) dq_t \qquad (2.3)$$

donde la varianza V obedece el proceso (2.2). q denota un proceso de Poisson, incorrelado con W_1 y W_2 y gobernado por la intensidad de salto constante λ_0, con lo que $\Pr(dq_t = 1) = \lambda_0 dt$. $k(t)$ denota la magnitud de salto si se produce un salto en el instante t. Se supone que dicha magnitud de salto se distribuye como una normal: $\ln(1 + k(t)) \approx N(-0.5\delta^2, \delta^2)$. Por tanto, los parámetros son $\psi = (\mu, \alpha, \beta, \eta, \rho, \delta, \lambda_0)$.

Desde un punto de vista económico, los saltos en rendimientos de acciones se justifican fácilmente. La llegada de nueva información induce una revisión instantánea de los precios. Añadir un componente salto debería mejorar el ajuste a las series temporales de rendimientos, puesto que los saltos ayudarán a acomodar los *outliers* así como la asimetría en la distribución. En este sentido, el modelo con saltos tiene dos posibles fuentes de asimetría: la magnitud media del salto y la correlación entre Brownianos ρ. La presencia conjunta de los factores de salto y volatilidad estocástica proporciona flexibilidad adicional para capturar las características sobresalientes de los rendimientos, incluyendo la asimetría y leptocurtosis.

2.3. Metodología de Estimación: EMM

En un primer paso, se obtiene una estimación QML de la densidad condicional de la serie de rendimientos del índice. La clave es elegir un modelo auxiliar que se aproxime bien a la distribución condicional del proceso de rendimientos. Gallant y Long (1997) demuestran que, dentro de la clase de modelos en tiempo discreto, las densidades SNP (*Semi-NonParametric*) son buenas candidatas para este propósito. Se basan en la noción de que puede usarse una expansión polinómica como estimador no paramétrico de una función de densidad (véase Gallant y Nychka, 1987)[18]. Constan de un término principal gaussiano, que consiste en, una vez prefiltrados los rendimientos mediante un MA(1), considerar un GARCH(1,1) para la varianza condicional de los residuos[19],

$$\begin{aligned} \upsilon_t &= 0 \\ h_t &= \gamma_0 + \gamma_1 r_{t-1}^2 + \vartheta_1 h_{t-1} \sim GARCH(1,1) \end{aligned} \qquad (2.4)$$

A continuación se añade una expansión de polinomios de Hermite al cuadrado par adaptar las características no gaussianas del proceso. La calidad del ajuste de los distintos modelos se evalúa utilizando criterios de información estándar, como son los criterios Akaike (AIC), Bayesiano (BIC) y Hannan-Quinn (HQC), así como mediante test de especificación, teniendo en cuenta que el comúnmente utilizado criterio de Akaike tiende a sobreparametrizar los modelos.

Así, f_K es la función de densidad SNP que toma la siguiente forma:

$$f_K(r_t \mid x_t;\xi) = \left(v + (1-v)\frac{[P_K(z_t, x_t)]^2}{\int_R [P_K(u, x_t)]^2 \varphi(u)du} \right) \frac{\varphi(z_t)}{\sqrt{h_t}} \qquad (2.5)$$

18 Las densidades condicionales propuestas por Gallant y Tauchen (1989) son muy adecuadas para estimar la densidad condicional que describe completamente el proceso de rentabilidades. Además, es un estimador no paramétrico consistente (Gallant y Nychka, 1987), eficiente (Fenton y Gallant, 1996a; Gallant y Long, 1997) y con propiedades cualitativas deseables (Fenton y Gallant, 1996b).

19 La elección del modelo no se realiza de manera arbitraria. Dada la falta de estructura de correlación serial en los rendimientos diarios, un término MA resulta adecuado para eliminar cualquier estructura dinámica de la media y centrarnos en la dinámica de la varianza, aproximada mediante un GARCH(1,1).

donde r_t, $x_t = (r_{t-1-L}), t = 1,...,\infty$ son variables aleatorias correspondientes a los procesos de rendimientos del índice y retardos de dichos rendimientos, $\varphi(\cdot)$ es la densidad normal estándar, v es una constante (0.01)[20]; $z_t = \frac{r_t - v_t}{\sqrt{h_t}}$ es el proceso estandarizado y $P_K(z,x)$ es un polinomio en (z, x) de grado K = (K_z, K_x) dado por la expresión siguiente:

$$P_K(z,x) = \sum_{i=0}^{K_z} a_i(x) z^i = \sum_{i=0}^{K_z} \left(\sum_{j=0}^{K_x} a_{ij} x^j \right) z^i, \quad a_{00} = 1 \qquad (2.6)$$

El término constante a_{00} se fija en 1 para obtener una representación única. Con esta normalización, la densidad f_K se interpreta como una expansión cuyo término principal es la densidad normal $\varphi(z)$ y cuyos términos de orden superior inducen desviaciones de la normal. La ventaja de la expansión rectangular (2.6) de $P_K(z,x)$ es que éste se interpreta como un polinomio en z de grado K_z, cuyos coeficientes son a su vez polinomios de grado K_x en x. Se toma además una forma específica para los polinomios $P_K(z,x)$, los llamados polinomios ortogonales de Hermite[21].

Con esta especificación de la SNP, la principal tarea de la expansión polinómica no paramétrica en la densidad condicional es capturar cualquier exceso de curtosis en el proceso de rendimientos y también cualquier asimetría que no haya sido acomodada por el término principal.

Nosotros consideramos dos modelos auxiliares, un GARCH(1,1) sin parte no paramétrica en primer lugar, que luego extenderemos mediante polinomios de Hermite. Los parámetros auxiliares a estimar por tanto, son $\xi = (\gamma_0,\gamma_1,\vartheta_1)$, en el primer caso, y $\xi = (\gamma_0,\gamma_1,\vartheta_1,\alpha_{01},...,\alpha_{0Kx},\alpha_{10},\alpha_{11},...,\alpha_{1Kx},\alpha_{20},\alpha_{21},...,\alpha_{2Kx},...,\alpha_{2Kz0},\alpha_{2Kz1},...,\alpha_{KzKx})$, en el segundo, y se estiman por QML,

$$\tilde{\xi} = \arg\max_{\xi} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \ln\left[f_K\left(\tilde{r}_t \mid \tilde{x}_t ; \xi \right) \right] \qquad (2.7)$$

20 Esta mixtura en la densidad condicional se utiliza para evitar la inestabilidad durante la estimación EMM, ya que, en su defecto, pueden darse problemas numéricos al evaluar la función f_K si, para una trayectoria simulada dada, $P_K(z_t,x_t)$ es igual a cero.

21 Véase Gallant, Hsieh y Tauchen, 1991 y Fenton y Gallant, 1996a.

donde $\tilde{r}_t, \tilde{x}_t = (\tilde{r}_{t-1}, \ldots, \tilde{r}_{t-L}), t = 1, \ldots, n$ son los datos observados y n el tamaño muestral.

El segundo paso del EMM consiste en estimar los parámetros del modelo estructural (SV/SVJ). Dada $\{\hat{r}_t(\psi), \hat{x}_t(\psi)\}_{t=1}^{N}$ una simulación dicho modelo a partir de ψ, su estimación se define de la forma siguiente:

$$\hat{\psi} = \arg\min_{\psi} \left[m_N\left(\psi, \tilde{\xi}\right)' \tilde{I}^{-1} m_N\left(\psi, \tilde{\xi}\right) \right] \qquad (2.8)$$

donde $m_N\left(\psi, \tilde{\xi}\right)$ es la esperanza de la función f_K evaluada en la estimación quasi-máxima verosímil de los parámetros del modelo auxiliar $\tilde{\xi}$:

$$m_N\left(\psi, \tilde{\xi}\right) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} \frac{\partial \ln f_K\left(\hat{r}_t(\psi) \middle| \hat{x}_t(\psi); \tilde{\xi}\right)}{\partial \xi} \qquad (2.9)$$

y la matriz de pesos $\tilde{I}^{-1}$ es una estimación consistente de la matriz de covarianzas asintótica de f_K del modelo auxiliar que se estima a partir del gradiente:

$$\tilde{I} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \left[\frac{\partial \ln f_K\left(\tilde{r}_t \middle| \tilde{x}_t; \tilde{\xi}\right)}{\partial \xi} \right] \left[\frac{\partial \ln f_K\left(\tilde{r}_t \middle| \tilde{x}_t; \tilde{\xi}\right)}{\partial \xi} \right]' \qquad (2.10)$$

Los resultados se juzgan mediante los test de especificación y diagnosis de modelo asociados. Si nos fijamos en la función objetivo, vemos que el estimador EMM es un estimador Chi-cuadrado para ψ (Gallant y Tauchen, 1996). Por tanto, bajo la hipótesis nula de que el modelo estructural es el correcto se deduce que:

$$n \cdot f\left(\hat{\psi}, \tilde{\xi}\right) \sim \chi^2_{\dim(\xi)-\dim(\psi)} \qquad (2.11)$$

donde $f\left(\hat{\psi},\tilde{\xi}\right)$ es el valor final de la función objetivo resultante de la estimación.

En caso de fracaso del modelo, si se rechaza la hipótesis nula, es útil examinar los elementos individuales del gradiente de la verosimilitud $m_N\left(\hat{\psi},\tilde{\xi}\right)$ que nos sugerirán razones de dicho fracaso, ya que los diferentes elementos del gradiente de la verosimilitud se corresponden con diferentes características de los datos. Más concretamente, debemos inspeccionar los estadísticos *t*,

$$\hat{t} = \frac{m_N\left(\hat{\psi},\tilde{\xi}\right)}{\sqrt{diag(S)}} \qquad (2.12)$$

es decir, los elementos del gradiente de la verosimilitud divididos por sus errores estándar, que vienen dados por la raíz cuadrada de los elementos diagonales de la matriz $S = \frac{1}{n}\left(\tilde{I} - M_\psi\left(M_\psi'\tilde{I}^{-1}M_\psi\right)^{-1}M_\psi'\right)$, donde M_ψ es la derivada parcial del gradiente de la verosimilitud $m_N\left(\hat{\psi},\tilde{\xi}\right)$ respecto a: $\psi:\ M_\psi = \frac{\partial m_N\left(\hat{\psi},\tilde{\xi}\right)}{\partial\psi}$.

Valores altos de estos estadísticos *t* revelan características que no están bien aproximadas. Para este mismo propósito los quasi-estadísticos *t*,

$$\hat{qt} = \frac{m_N\left(\hat{\psi},\tilde{\xi}\right)}{\sqrt{diag(qS)}} \qquad (2.13)$$

donde $qS = \frac{1}{n}\tilde{I}$ y, aunque están subestimados, son más fáciles de computar porque evitan calcular la aproximación numérica de M_ψ (Gallant y Tauchen, 1997).

2.4. Resultados Empíricos

Disponemos de rendimientos diarios (en porcentaje) de cuatro índices bursátiles: el S&P 500 (1986–2005) y tres índices europeos, DAX 30, IBEX 35 y CAC 40, (1988–2003), lo que supone un tamaño muestral de 5046, 4023, 3996 y 4010 observaciones, respectivamente. La frecuencia muestral diaria nos permite capturar fluctuaciones de alta frecuencia en el proceso de rendimientos que son críticas en la identificación del componente de salto. Los rendimientos presentan un exceso de curtosis importante, lo que implica colas más anchas en comparación con la distribución normal. También se observa asimetría negativa, es decir, largas colas en la dirección de los rendimientos negativos. Por tanto, el modelo de generación de datos que se asuma para los rendimientos debe implicar distribuciones marginales no normales, con colas anchas y posible asimetría negativa.

2.4.1. Modelo Auxiliar Sin Parte No Paramétrica: GARCH(1,1)

La elección de este modelo auxiliar sencillo imposibilita evaluar los resultados mediante los test de especificación y diagnosis de modelo asociados al método de estimación EMM. No es posible realizar el contraste Chi-cuadrado de sobre identificación, ya que para ello es necesario que el número de parámetros estructurales sea menor o igual que el número de parámetros auxiliares, $\dim(\psi) \leq \dim(\xi)$[22]. Ésta es una condición de identificación, necesaria para realizar el contraste global de ajuste, pero no impide realizar la estimación. Se puede estimar cuando la condición no se cumple, aunque cabe esperar multiplicidad de soluciones (estimaciones). En cualquier caso, también es posible fijar valores paramétricos en el modelo estructural, tratando de igualar momentos teóricos y muestrales, para estimar menos parámetros estructurales.

Esta condición se precisa también para poder obtener una estimación de la matriz de covarianzas asintótica de la estimación del vector de parámetros estructural, así como para calcular los errores estándar del gradiente de la verosimilitud, necesarios para construir los estadísticos *t*.

22 Véase Gallant, Hsieh y Tauchen, 1997.

No obstante, para este mismo propósito, los quasi-estadísticos *t*, a pesar de estar subestimados, son generalmente adecuados y su cálculo es perfectamente factible en este caso y además, son más fáciles de computar. En cualquier caso, hay que tener en cuenta que este modelo auxiliar está incluido dentro de los modelos SNP en donde la parte principal de la densidad es la de un GARCH(1,1) y no se consideran polinomios de Hermite.

Comenzamos estimando para cada índice bursátil la especificación SNP del modelo auxiliar. La volatilidad muestra una alta persistencia y la volatilidad a largo plazo del GARCH se aproxima a la desviación típica muestral. Además, las estimaciones son estadísticamente significativas.

Una vez estimados los parámetros del modelo auxiliar, tenemos que estimar los del modelo estructural, primero el modelo de volatilidad estocástica SV y segundo el modelo de volatilidad estocástica con saltos SVJ[23].

La Tabla 2.1 muestra las estimaciones SV y SVJ[24], el valor de la función objetivo y el estadístico Chi-cuadrado, junto con los umbrales que delimitan el intervalo de confianza al 99% de una distribución Chi-cuadrado con distintos grados de libertad. La Tabla 2.2 contiene los valores de los quasi-estadísticos *t*.

También es importante la comparación de los valores muestrales y simulados, en media sobre 1000 simulaciones, de la asimetría y curtosis, así como el grado de ajuste obtenido. Éste lo cuantificamos mediante la siguiente función de pérdida[25],

23 Durante el desarrollo de la estimación, cada vez que se evalúa la forma cuadrática f a minimizar, se simula una trayectoria distinta a partir del modelo estructural. Cada serie de rentabilidades simulada $\{\hat{r}_i(\psi)\}_{i=1}^{N}$ se obtiene después de generar dos muestras antitéticas de tamaño (10000 + 1000) x 10 + 1000 a partir del modelo en tiempo continuo mediante una discretización de Euler de primer orden con frecuencia de paso de 1/10 días. Se descartan los primeros 1000 valores simulados para eliminar el efecto de las condiciones iniciales y se suman de 10 en 10 el resto de valores para obtener finalmente una serie de rentabilidades diarias de tamaño $N = 11000$.

24 Las estimaciones obtenidas son, salvo para el IBEX 35, resultado de fijar μ en la media de las rentabilidades observadas, estimando el resto de parámetros condicional en dicho nivel, ya que al estimar dejando libre también μ, la precisión alcanzada para este parámetro es baja. La idea es que al fijar los parámetros para los que se consigue menor precisión, las propiedades del algoritmo de estimación deben mejorar sustancialmente. Así ocurre en todos los casos salvo para el IBEX 35, por lo que en ese caso tomamos como estimación final la resultante de no fijar μ.

25 Señalar que en la función de pérdida conjunta asignamos el mismo peso a ambos momentos.

$$FP_{cjta} = 0.5 \times FP_{asim} + 0.5 \times FP_{curt}$$

$$FP_{asim} = 100\left|\frac{asim_{datos} - asim_{\hat{\psi}}}{asim_{datos}}\right| \quad y \quad FP_{curt} = 100\left|\frac{curt_{datos} - curt_{\hat{\psi}}}{curt_{datos}}\right| \qquad (2.14)$$

que nos indica la capacidad explicativa de los momentos de tercer y cuarto orden, ya que nos dice qué porcentaje de la asimetría y curtosis observada en los datos no llegamos a ajustar, tanto individual como conjuntamente. Los valores obtenidos se recogen en la Tabla 2.3.

Tabla 2.I: Estimaciones EMM del Modelo de Volatilidad Estocástica (SV) y del Modelo de Volatilidad Estocástica con Saltos (SVJ)

Estimaciones EMM								
SNP: GARCH(1,1)								
	S&P 500		DAX 30		IBEX 35		CAC 40	
Parámetro	SV	SVJ	SV	SVJ	SV	SVJ	SV	SVJ
μ	0.0354	0.0354	0.0342	0.0342	0.0126†	0.0743†	0.0317	0.0317
α	0.1005	0.0476	0.0461	0.0653	0.0588	0.0376	0.0410	0.0401
β	0.0320	0.0162	0.0152	0.0220	0.0127	0.0111	0.0115	0.0114
η	0.1227†	0.0814	0.0529	0.1319	0.1189†	0.0490†	0.1052	0.1012
ρ	-0.2958†	-0.6538†	-0.1063†	-0.2126†	-0.0557†	-0.4047†	-0.4214†	-0.4377†
δ		0.9156†		0.3741		0.3495		0.2915
λ_0		0.0004		0.0017		0.0024		0.0021
f	0.0030	0.0019	0.0038	0.0011	0.0029	0.0016	0.0046	0.0024
(f_0)	(0.8750)	(0.0297)	(0.0045)	(0.0053)	(0.0074)	(0.0159)	(0.0067)	(0.0072)
χ^2	15.14	9.59	15.44	4.60	11.75	6.48	18.41	9.70

† Parámetros estimados con baja precisión.

[g.l.]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]
$\chi^{2*}_{0.01;[g.l.]}$	6.63	9.21	11.34	13.28	15.09	16.81	18.48	20.09

* Umbral que delimita el intervalo de confianza al 99% de confianza de una χ^2 con [*g.l.*] grados de libertad.

Tabla 2.2: Diagnosis EMM del Modelo de Volatilidad Estocástica (SV) y del Modelo de Volatilidad Estocástica con Saltos (SVJ)

Quasi-estadísticos t								
SNP: GARCH(1,1)								
	S&P 500		DAX 30		IBEX 35		CAC 40	
Parámetro	SV	SVJ	SV	SVJ	SV	SVJ	SV	SVJ
γ_0	1.0056	6.6064	-2.6098	-0.1738	0.3980	1.0832	-3.3980	-0.5229
	(0.2649)	(0.2649)	(0.1489)	(0.1489)	(0.2639)	(0.2639)	(0.1051)	(0.1051)
γ_1	-0.9494	3.2449	-3.9555	-2.3710	-1.2954	-1.2187	-4.6164	-3.1885
	(0.1876)	(0.1876)	(0.1183)	(0.1183)	(0.1148)	(0.1148)	(0.1004)	(0.1004)
ϑ_1	0.0775	6.1259	-3.5067	-1.2512	0.1353	0.5286	-3.9810	-1.7135
	(0.1696)	(0.1696)	(0.1404)	(0.1404)	(0.1941)	(0.1941)	(0.1137)	(0.1137)

Tabla 2.3: Función de Pérdida individual y conjunta de los momentos de tercer y cuarto orden

SNP: GARCH(1,1)								
	S&P 500		DAX 30		IBEX 35		CAC 40	
Parámetro	SV	SVJ	SV	SVJ	SV	SVJ	SV	SVJ
$FP_{asimetría}$	99.76%	6.72%	99.58%	20.18%	98.25%	38.58%	95.36%	12.51%
$FP_{curtosis}$	93.37%	4.30%	62.89%	2.75%	52.74%	5.55%	45.83%	13.05%
$FP_{conjunta}$	96.57%	5.51%	81.23%	11.47%	75.50%	22.06%	70.60%	12.78%

La precisión individual de cada parámetro se examina mediante un ejercicio de estimación condicional. Se trata de fijar los valores de todos los parámetros menos uno, y en lugar de utilizar el minimizador, realizar una red de búsqueda para ver cómo cambia el valor de la función objetivo. Este ejercicio de sensibilidad resulta útil para investigar indicios de que el mínimo local alcanzado pueda ser global. Esencialmente consiste en ver cómo cambia el valor de la función objetivo cuando varía uno de los parámetros desde la estimación obtenida.

En todo caso, hay que reconocer que la precisión alcanzada puede no ser muy alta para algunos parámetros, lo que se refleja en que a veces hay

variaciones apreciables en algún parámetro sin que la función objetivo se deteriore mucho. No obstante, dada la complejidad del problema de estimación, este ejercicio proporciona información tranquilizante respecto al hecho de que, en varias dimensiones, consideradas individualmente, la estimación está en posición de mínimo.

Modelo SV

Los resultados muestran una reducción importante de la función objetivo. En el caso del S&P 500 destacan los valores quizá un poco altos de β y sobre todo de α, en comparación con lo observado en la literatura. Sin embargo, al igual que η, se estiman con buena precisión. Por otro lado, las estimaciones para η y ρ son bastante similares a las existentes en la literatura, resaltando, también para los índices europeos, la negatividad del parámetro de correlación ρ que captura la asimetría observada en el proceso de rendimientos. Sin embargo, la precisión en la estimación de este parámetro es baja. En cuanto al estadístico Chi-cuadrado, para el S&P 500 necesitamos al menos seis grados de libertad para no rechazar el modelo SV, y seis, cuatro y siete, para no rechazarlo en el caso de los índices DAX 30, IBEX 35 y CAC 40, respectivamente.

Los quasi-estadísticos t son algo altos para el DAX 30 y sobre todo para el CAC 40. Sin embargo, para los otros dos índices, están bastante cercanos a cero. De todas formas, lo que en realidad importa es la norma del gradiente de la verosimilitud, para lo que se calcula la forma cuadrática f, que parece difícil que pueda reducirse aún más, ya que es del orden de 10^{-3} para los cuatro índices. Esto parece indicar que tenemos ya una estimación de este modelo estructural de volatilidad estocástica SV.

Al examinar los estadísticos básicos vemos que no capturan las características de la serie de datos, lo que se refleja en los valores tan altos obtenidos para la función de pérdida, que refleja más de un 90% de falta de ajuste en asimetría y curtosis para el S&P 500. Para el resto de índices europeos, con valores de la función de pérdida del 63%, 53% y 46%, para Alemania, España y Francia, respectivamente, la curtosis se ajusta algo mejor. Pero esta mejora en el ajuste de Europa respecto a EE. UU. se debe a que el modelo SV recoge una curtosis similar, en torno a 3,

para todos los índices, mientras que los valores de curtosis a ajustar (los valores de curtosis de los datos) son mucho menores para Europa que para EE. UU.

Parece que, para explicar asimetría y curtosis, se necesita otra estructura. Un modelo de volatilidad estocástica no parece ser suficiente. Para ello, debemos generalizar y estimar el modelo estructural a incorporar saltos, que es nuestro siguiente gran ejercicio de estimación.

Modelo SVJ

Extendemos la especificación de volatilidad estocástica anterior incluyendo un componente salto en el proceso de rendimientos. Los parámetros estimados muestran cambios significativos con respecto a la estimación SV y la función objetivo se reduce considerablemente para todos los índices, tanto desde su valor inicial como desde su valor final en la estimación SV, por lo que también el estadístico Chi-cuadrado se reduce respecto al modelo SV. Es más, necesitamos sólo uno (DAX 30 y IBEX 35) y tres (S&P 500 y CAC 40) grados de libertad, para que el modelo SVJ no se rechace.

Señalar que la disminución observada (excepto para el DAX 30) de la estimación de η al añadir saltos en el proceso de rendimientos sugiere, que en ausencia de éstos, la volatilidad de la varianza tiene que ser mayor para que el modelo pueda ajustar la distribución histórica de rendimientos.

Por otro lado, el parámetro de correlación entre *shocks* en la varianza y el proceso de rendimientos, ρ, es negativo en todas las estimaciones, capturando la asimetría negativa en la distribución de rendimientos, aunque de nuevo se estima con baja precisión. Sorprende quizá para el S&P 500, su alta magnitud, en valor absoluto, en comparación con los valores habituales en la literatura. Respecto al resto de parámetros, nótese cómo α y β han disminuido a partir de la condición inicial aproximándose a lo observado en la literatura, y destacando la importante reducción del parámetro α.

En cuanto al componente salto, observamos que la estimación del parámetro λ_0 presenta un valor bastante más bajo para el S&P 500 que para los índices europeos. Estas estimaciones suponen un total de 1 salto anual para el S&P 500 frente a 4, 6 y 5 saltos anuales para el DAX 30, IBEX 35 y CAC 40, respectivamente. La magnitud media de los saltos estimada, $-0.5\hat{\delta}$, es -0.42 para el S&P 500, frente a -0.06 del DAX 30 y el IBEX 35, y -0.04 del CAC 40. Los saltos son menos frecuentes en EE. UU. (menor λ_0 estimado) pero de mayor magnitud, lo que explica la gran curtosis de los datos estadounidenses.

Los quasi-estadísticos *t* son un tanto altos para el S&P 500, sobre todo para γ_0 y ϑ_1, lo que se refleja a su vez en el gradiente de la verosimilitud obtenido para la estimación, que toma valores algo altos, aunque más cercanos a cero que los del gradiente de la verosimilitud que se obtiene a partir de la condición inicial ψ_0, ambos calculados en media sobre 1000 simulaciones. Para el resto de índices, los quasi-estadísticos *t* están bastante próximos a cero, y en general, son menores que los obtenidos para el modelo SV. De todas formas, el correspondiente a γ_1 es, aunque menor que en el modelo SV, aún un tanto alto para los índices DAX 30 y CAC 40. Esto puede estar reflejando la bien conocida limitación de los modelos GARCH, en cuanto a que son modelos simétricos y por tanto, imponen la misma respuesta γ_1 ante *shocks* en volatilidad positivos y negativos, cuando sabemos que en la práctica los *shocks* negativos suelen tener un mayor impacto en la volatilidad. Parece entonces que la asimetría adicional introducida por el componente salto no es suficiente para compensar la simetría impuesta en el modelo auxiliar.

Si nos fijamos en los estadísticos básicos resultantes para la estimación $\hat{\psi}$, vemos que el modelo SVJ proporciona una mejora substancial con respecto al modelo SV, con una salvedad, para el IBEX 35, el ajuste global ha empeorado en relación a la condición inicial, puesto que aunque la curtosis se aproxima mejor con la estimación $\hat{\psi}$, perdemos bastante precisión a la hora de ajustar la asimetría. También en el caso del CAC 40 se pierde precisión en ajustar la asimetría a favor del ajuste en curtosis, pero en este caso el ajuste global no se ve afectado e incluso es algo mayor. En cuanto al DAX 30, destaca el ajuste bastante peor de la asimetría en comparación al casi perfecto ajuste de la curtosis. Entonces, mientras que para EE. UU. ambos momentos se ajustan muy bien,

para Europa parece que en general tenemos algún problema a la hora de ajustar la asimetría, y es que el grado de ajuste no es tan bueno como para la curtosis. Y como los índices europeos presentan una asimetría negativa mucho más baja que el S&P 500, esto parece sugerir que para que el modelo SVJ ajuste bien la asimetría, necesitamos que los rendimientos presenten un nivel mínimo de asimetría negativa en los datos.

En cualquier caso, las simulaciones generadas a partir de $\hat{\psi}$ se aproximan muchísimo a la serie real de datos siendo sumamente interesante que podamos para todos los índices estudiados reproducir la asimetría y curtosis existente en los datos, indicando que además de la volatilidad estocástica los saltos en rentabilidad son fundamentales para capturar la dinámica de los rendimientos de índices bursátiles. Y esto ocurre no sólo para EE. UU., para el que ya existían evidencias al respecto, sino también para los tres índices europeos estudiados, lo que aporta confianza sobre este resultado. Así, al extender el trabajo existente para EE. UU. a otros índices de la zona euro, se ha constatado la importancia de considerar ambos factores, volatilidad estocástica y saltos en rentabilidad, cuando lo que se pretende es describir la distribución de rendimientos de índices bursátiles alejados de la normal.

2.4.2. Modelo Auxiliar Extendido

Dado que la elección del modelo auxiliar es un punto vital dentro de la metodología de estimación EMM y que las densidades SNP son buenas candidatas para este propósito, es importante analizar la necesidad de extender el modelo auxiliar GARCH(1,1) que venimos utilizando al añadir polinomios de Hermite[26], eligiendo con cuidado el orden de dicha

26 La especificación GARCH(1,1) como término principal presenta una deficiencia importante. Es simétrica en el sentido de que *shocks* negativos y positivos tienen el mismo efecto en la volatilidad, ya que la varianza condicional depende de la magnitud de las innovaciones retardadas pero no de su signo. No obstante, observamos, como es habitual, efectos asimétricos en los datos, lo que sugiere, examinar un modelo asimétrico como posible término principal. Sin embargo, al considerar un EGARCH(1,1), con el objetivo de recoger los efectos asimétricos, se complica la estimación. Ésta se ralentiza considerablemente, ya que el cálculo del gradiente de la verosimilitud en cada simulación es computacionalmente más exigente. Además, las estimaciones obtenidas apenas difieren de las que ya teníamos. Esto, unido al hecho de que la principal tarea de la expansión polinómica no paramétrica es capturar cualquier exceso de curtosis y asimetría no acomodada por el término principal, sugiere que la introducción de polinomios de Hermite puede ser suficiente para capturar la asimetría observada. Este argumento viene además respaldado por buenos ajustes obtenidos en asimetría y curtosis mediante el modelo SVJ al utilizar como modelo auxiliar el

expansión. Consideramos por tanto $K_z > 0$, permitiendo también heterogeneidad, al permitir que los coeficientes del polinomio de grado K_z en z sean a su vez polinomios de grado K_x en x (con $K_x = 1$). Se estiman las distintas especificaciones SNP según los valores de K_z y K_x, calculando en cada caso el valor de los criterios de información Bayesiano (BIC) y Hannan-Quinn (HQC). Ambos criterios[27] indican que K_z debe ser 10 (S&P 500), 12 (DAX 30), 9 (IBEX 35) y 6 (CAC 40), con $K_x = 0$.

Por último, cabe señalar que la expansión polinómica posibilita evaluar los resultados mediante los test de especificación y diagnosis de modelo asociados al método de estimación EMM, ya que para tanto para SV como para SVJ, se cumple la condición de identificación $\dim(\psi) \leq \dim(\xi)$.

Las estimaciones SV y SVJ obtenidas previamente para el modelo auxiliar sencillo GARCH(1,1) nos servirán de referencia. En cada caso, tomaremos como vector de parámetros inicial ψ_0 dichas estimaciones.

De nuevo, el modelo SV se rechaza rotundamente a cualquier nivel de significación razonable (test Chi-cuadrado) para todos los índices estudiados y no se consigue reproducir la asimetría y curtosis existente en los datos.

Para el modelo SVJ, al igual que ocurría al considerar el modelo auxiliar sencillo, el parámetro estimado η (salvo para el DAX 30) disminuye al añadir saltos en rentabilidad. También las conclusiones son similares en cuanto al componente salto. Los saltos son menos frecuentes para EE. UU. (menor ψ_0) pero de mayor magnitud. El estadístico chi-cuadrado disminuye de valor, un 10%, 3%, 11% y 2%, para el S&P 500, DAX 30, IBEX 35 y CAC 40, respectivamente. Pero esta reducción no es suficiente y el modelo SVJ también se rechaza[28]. Por otro lado, la función objetivo presenta valores bastante más altos (en SV y SVJ) al incluir polinomios de Hermite (en torno a 10^{-2} frente a valores en torno a 10^{-3}). Esto puede deberse a problemas numéricos en el cálculo del gradiente de la

GARCH(1,1). Decidimos por tanto extender el modelo auxiliar únicamente mediante polinomios de Hermite, tomando como término principal un GARCH(1,1).

27 Se llega a la misma conclusión mediante el test de la razón de verosimilitud y las matrices de correlación entre los parámetros estimados.

28 Esto se refleja también en el alto número de componentes del gradiente de la verosimilitud significativamente distintos de cero.

verosimilitud (y por tanto de la función objetivo), como consecuencia de haber considerado demasiada estructura en el modelo auxiliar. Por último, las simulaciones generadas a partir de la estimación SVJ muestran que, aunque en comparación con SV la mejora es substancial, en general no aumenta la capacidad explicativa de los momentos de tercer y cuarto orden con respecto al modelo auxiliar sencillo.

Concluimos por tanto que la incorporación de los polinomios de Hermite al modelo auxiliar básico GARCH(1,1) no contribuye apenas a la capacidad explicativa de los momentos de orden superior considerados, ya que únicamente en el caso de uno de los cuatro índices, en el caso del IBEX 35, se ha observado una mejora substancial en el ajuste global al extender el modelo auxiliar.

2.5. Conclusiones

Es aceptado en la literatura que la introducción de volatilidad estocástica o saltos en modelos en tiempo continuo difusivos puede explicar las características de los rendimientos de activos financieros. Sin embargo, los resultados obtenidos en la literatura para datos americanos son contradictorios y muchas veces fracasan a la hora de aproximar satisfactoriamente la dinámica del proceso de rendimientos del activo subyacente. Por tanto, el objetivo de este capítulo es, por un lado, identificar un modelo que ajuste adecuadamente dicha dinámica y, por otro, extender la poca evidencia existente a otros índices europeos. De esta forma, consideramos datos de rentabilidades diarias del S&P 500, así como del DAX 30, IBEX 35 y CAC 40, aportando una visión global del centro-sur de Europa.

Analizamos un modelo de difusión para la volatilidad estocástica que extendemos permitiendo saltos con intensidad constante en rentabilidad. La estimación se lleva a cabo mediante una implementación cuidadosa del EMM, considerando primero un modelo auxiliar simple GARCH(1,1) a partir del cual se obtienen unas estimaciones iniciales de los parámetros estructurales que sirven de referencia en la estimación al extender mediante polinomios de Hermite el modelo auxiliar.

Encontramos que un modelo de difusión para la volatilidad estocástica que no incorpore saltos no es suficiente para acomodar las singularidades de los rendimientos de los distintos índices bursátiles. Sin embargo, con un modelo que incorpore ambos componentes, volatilidad estocástica y saltos en rentabilidad, logramos reproducir la asimetría y curtosis existente en los datos de los cuatro índices estudiados, y además, se mejora el ajuste en términos de especificación del modelo, lo que proporciona evidencia empírica apoyando la presencia conjunta de ambos factores. Además, el hecho de que esto se repita no sólo para EE. UU. sino también para el resto de índices, nos da confianza sobre este resultado. Por otro lado, el peor ajuste en asimetría para los índices europeos unido al hecho de que éstos presentan un valor muestral mucho menor que para EE. UU., nos sugiere que para que el modelo SVJ ajuste bien la asimetría, es necesario que los rendimientos presenten un nivel mínimo de asimetría negativa.

Por otro lado, a pesar de que junto a la volatilidad estocástica los saltos en rentabilidad son los dos componentes más importantes para describir la dinámica de las series temporales de rendimientos, pueden no ser suficientes y haga falta añadir algo más, como saltos en volatilidad, lo que puede ser una posible extensión para nuestro trabajo. La idea es que el factor que gobierna la volatilidad condicional cambie rápidamente y sea a su vez persistente. Además, el hecho de que sistemáticamente en todas las estimaciones el parámetro de correlación ρ no se estime con precisión sugiere analizar la posibilidad de que no se esté introduciendo correctamente en el modelo, y es que una correlación constante en el tiempo no es lo más razonable. Una posibilidad es considerar que la correlación depende de una variable de estado, ya sea la rentabilidad o la propia varianza, lo cual es totalmente sensato, dejando que sea la estimación quién determine si es o no constante en el tiempo. Esto constituye una posible segunda línea de investigación futura.

Por último, vemos que la incorporación de polinomios de Hermite al modelo auxiliar no parece contribuir a la capacidad explicativa de los momentos de tercer y cuarto orden tan bien ajustados por el modelo de volatilidad estocástica con saltos cuando el modelo auxiliar considerado es el GARCH(1,1).

CAPÍTULO 3: ESTIMACIÓN EMM DE MODELOS EN TIEMPO CONTINUO DE VOLATILIDAD ESTOCÁSTICA CON SALTOS EN RENTABILIDAD Y VOLATILIDAD

3.1. Introducción

Puesto que la evidencia empírica sugiere que las decisiones financieras basadas en un marco en tiempo continuo serán satisfactorias sólo si se construye sobre especificaciones razonables del proceso de rendimientos del activo subyacente, no sorprende que la literatura haya intentado aproximar el proceso estocástico de los rendimientos de activos financieros. El hecho de que el modelo de Black-Scholes no sea suficiente para capturar algunas características importantes de los datos de rendimientos de alta frecuencia, como son el exceso de curtosis, la asimetría, el efecto apalancamiento y el agrupamiento de la volatilidad, ha llevado a analizar otras especificaciones, introduciendo volatilidad estocástica o saltos, que expliquen estas características de los rendimientos de activos. Los resultados para datos estadounidenses son contradictorios y muchas veces fracasan a la hora de ajustar satisfactoriamente la dinámica del proceso de rendimientos del activo subyacente. Existe fuerte evidencia empírica de la presencia de volatilidad estocástica y saltos en precios, pero no existe consenso respecto a la presencia e importancia de saltos en volatilidad[29].

En el capítulo anterior hemos visto que para aproximar con éxito datos de rendimientos alejados de la distribución normal es fundamental, además de considerar volatilidad estocástica, incorporar saltos en rentabilidad (modelo SVJ). Y es que con esta especificación logramos reproducir la asimetría y curtosis existente en los rendimientos diarios de cuatro índices bursátiles distintos: el estadounidense S&P 500, para el que ya existen evidencias en este sentido, y otros tres índices de la zona euro, el

29 Véase Andersen, Benzoni y Lund (2002), Chernov, Gallant, Ghysels y Tauchen (2003), Eraker, Johannes y Polson (2003) y Broadie, Chernov y Johannes (2007).

DAX 30, el IBEX 35 y el CAC 40, confirmando el resultado. Sin embargo, concluíamos que estos dos componentes, a pesar de ser los principales, pueden no ser suficientes y haga falta añadir algo más, como saltos en volatilidad, tal y como documentan Broadie, Chernov y Johannes (2007) y Eraker, Johannes y Polson (2003), entre otros.

En este capítulo, añadimos por tanto este componente de salto en volatilidad al modelo SVJ, y observamos que los resultados son favorables a este modelo extendido SVCJ. La idea es capturar mejor el proceso de volatilidad, sin perder precisión en el ajuste de la asimetría y curtosis obtenido con el modelo SVJ.

Finalmente, nos planteamos estimar los mismos modelos a otras series temporales de rendimientos con distribuciones no normales, de colas anchas y asimetría negativa. Por ello, analizamos los tres modelos estructurales para rendimientos diariosde tres carteras extremas de las 25 de Fama-French, las cuales están diseñadas para centrarse en dos características de los rendimientos medios de los activos: el tamaño y el ratio VC/VM. Estas carteras han sido ampliamente utilizadas para evaluar modelos de valoración de activos, pero la literatura previa se ha encontrado con dificultades a la hora de explicar el comportamiento de las carteras extremas C_{11} (*pequeño-crecimiento*), C_{15} (*pequeño-valor*) y C_{51} (*grande-crecimiento*). Los rendimientos de estas tres carteras presentan valores pronunciados de asimetría y, sobre todo, curtosis, por lo que, aunque no se ha estudiado previamente en la literatura, a priori nos parecen candidatas naturales para analizar si es adecuado considerar como proceso generador de datos de estas carteras una especificación de volatilidad estocástica (SV) con posibles saltos en rentabilidad (SVJ) y en volatilidad (SVCJ).

Las estimaciones se llevan a cabo utilizando la metodología de estimación EMM descrita en el Capítulo 2. Esta metodología es especialmente útil en un contexto de estimación basado en simulación, donde el modelo estructural es fácilmente simulable pero cuya función de verosimilitud es intratable. La idea del método es relativamente sencilla: utilizar la esperanza respecto al modelo estructural del gradiente de verosimilitud de un modelo auxiliar como el vector de condiciones de momentos en la estimación GMM.

3.2. Modelos

Sean S_t y V_t el precio y varianza en el instante t del activo a estudio, los cuales satisfacen las siguientes expresiones:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sqrt{V_t}\, dW_{1,t} + k(t) dq_t$$
$$dV_t = (\alpha - \beta V_t)dt + \eta\sqrt{V_t}\, dW_{2,t} + x(t) dq_t \qquad (3.1)$$

donde W_1 y W_2 son movimientos Brownianos estándar con correlación $\mathrm{cov}(dW_{1,t}, dW_{2,t}) = \rho dt$; q es un proceso de Poisson, incorrelado con W_1 y W_2, con intensidad de salto constante λ_0, y $k(t)$ y $x(t)$ son la magnitud de salto en rentabilidad y volatilidad, respectivamente. Casos particulares de esta especificación SVCJ son los modelos SV y SVJ, cuando $q_t = 0$ y $x(t) = 0$, respectivamente.

Los saltos en volatilidad se introducen fácilmente en el modelo SVJ añadiendo el término adicional $x(t)dq$ a la ecuación de la varianza V_t, donde la amplitud de salto $x(t)$ se distribuye exponencialmente, $x(t) \sim e^{m_{jv}}$, para garantizar que la varianza se mantenga positiva. dq_t es el mismo proceso de Poisson que gobierna el componente salto en rentabilidad, de manera que el modelo SVCJ[30] fija llegadas de salto contemporáneas para ambos procesos de rentabilidad y volatilidad, es decir, intensidades de salto λ_0 idénticas (misma probabilidad de que ocurra un salto en rendimiento y un salto en volatilidad), lo cual tiene sentido puesto que se tiende a observar que un salto en volatilidad viene acompañado de un salto en rentabilidad[31]. Al añadir saltos en volatilidad, cambia la ecuación de la magnitud de salto en rentabilidad y en particular, su media: $\ln(1 + k(t)) \sim N(-0.5\delta^2 + \rho_{jv} x(t), \delta^2)$. Por tanto, el vector de parámetros a estimar es $\psi = (\mu, \alpha, \beta, \eta, \rho, \delta, \lambda_0, \rho_{jv}, m_{jv})$.

Esta formulación introduce un efecto adicional de asimetría negativa debido a los saltos cuando $\rho_{jv} < 0$. En este caso, un salto en volatilidad

30 *Stochastic Volatility with perfectly Correlated Jumps times in Returns and Variance.*

31 Una posible variante es considerar distintos procesos de Poisson para los componentes de salto en rentabilidad y volatilidad (intensidades de salto diferentes), modelo introducido en la literatura y denotado SVIJ (*"Stochastic Volatility with Independent arriving Return and Variance Jumps"*).

de gran magnitud $x(t)$ disminuye la media de la amplitud de salto en rentabilidad, aumentando así el efecto apalancamiento y produciendo asimetría negativa. Por otro lado, los saltos positivos en varianza contribuyen a la asimetría positiva de la distribución de la varianza, y ambas características (asimetría positiva de la varianza y asimetría negativa de la rentabilidad) tienden a anchar las colas de la distribución de rendimientos, induciendo asimetría negativa y curtosis, características generalmente observadas en los rendimientos de activos financieros, y en particular en los índices bursátiles y carteras de activos de renta variable a estudio en este trabajo.

3.3. Metodología de Estimación: EMM

Brevemente, el método de estimación EMM consta de dos partes fundamentales[32]. En un primer paso, se estima, por QML, la densidad condicional de la serie de rendimientos, aproximada mediante la densidad SNP resultante de considerar un GARCH(1,1) como modelo auxiliar[33].

En un segundo paso, la esperanza del gradiente de la verosimilitud de la función de densidad SNP proporciona las condiciones de momentos para la estimación de los parámetros del modelo estructural mediante el método de momentos simulado.

3.4. Índices Bursátiles: Modelo SVCJ

Se dispone de la misma base de datos que en el Capítulo 2, rentabilidades diarias (en porcentaje), entre 1986 y 2005, para el S&P 500, y entre 1988 y 2003 para el DAX 30, IBEX 35 y CAC 40, lo que supone un tamaño muestral de 5046, 4023, 3996 y 4010, respectivamente. Éstos presentan asimetría negativa y un exceso de curtosis importante, por lo que el modelo estructural que se asuma para los rendimientos debe implicar distribuciones marginales no normales, con colas anchas y posible asimetría negativa.

32 Véase el Capítulo 2 para un explicación más detallada de la metodología de estimación EMM.

33 No se considera el modelo SNP extendido mediante polinomios de Hermite como modelo auxiliar, ya que en el capítulo anterior veíamos que esta especificación no mejoraba los resultados obtenidos con el modelo auxiliar sencillo GARCH(1,1).

En el capítulo anterior hemos visto que aunque junto a la volatilidad estocástica los saltos en rentabilidad son los dos componentes más importantes para describir la dinámica de las series de rendimientos, pueden no ser suficientes y haga falta añadir algo más. En este sentido, la literatura se inclina por extender el modelo SVJ incorporando saltos en volatilidad[34]. La idea es que el factor que gobierna la volatilidad condicional cambie rápidamente y sea a su vez persistente. Por un lado, aunque un modelo difusivo para la volatilidad es altamente persistente, su dinámica se controla por un movimiento Browniano, de forma que la volatilidad estocástica puede solo incrementarse gradualmente vía una secuencia de pequeños incrementos normalmente distribuidos (es persistente pero no rápido). Por otro lado, los saltos en rentabilidad generan grandes movimientos, pero el impacto de un salto no influye en la distribución de rendimientos futura (es rápido pero no persistente).

Por tanto, la razón de extender el modelo SVJ a saltos en volatilidad no es tanto obtener un mejor ajuste de las propiedades de la serie de rentabilidades, puesto que con SVJ hemos conseguido ajustar razonablemente bien la asimetría y curtosis existente en los datos, sino más bien, lograr con este nuevo modelo SVCJ un ajuste mejor en términos de especificación, de manera que, sin perder precisión en el ajuste de los momentos de tercer y cuarto orden de las rentabilidades, obtengamos una función objetivo más baja que nos incline a elegir este modelo SVCJ con respecto a SVJ, en cuyo caso, sugerirá que se ha logrado capturar mejor el proceso de volatilidad, que es nuestro objetivo en esta extensión. El problema radica en la imposibilidad de comparar mediante simulación el ajuste en volatilidad, ya que éste es un proceso latente.

Las estimaciones EMM para el modelo SVCJ[35] apenas varían respecto a la condición inicial (estimaciones SVJ). Destaca también la falta de precisión obtenida para los dos parámetros de correlación ρ y ρ_{jv}, lo que nos sugiere introducir de forma alternativa esta característica en el modelo. Una extensión potencial es considerar, por un lado, como ya apuntábamos en el Capítulo 2, una correlación entre Brownianos ρ no constante y dependiente de una variable de estado, y por otro, siguiendo a Broadie, Chernov y Johannes (2007), una correlación entre magnitudes de salto

34 Véase Eraker, Johannes y Polson (2003) y Broadie, Chernov y Johannes (2007).

35 Dado que se trabaja con la misma base de datos y mismo modelo auxiliar, éste ya ha sido previamente estimado para cada índice en el Capítulo 2.

ρ_{jv} nula, para ver si el problema radica en la excesiva parametrización. En cuanto a m_{jv} la precisión alcanzada es buena en el caso de los tres índices europeos, aunque los valores obtenidos para este parámetro son tan bajos que no parece que se den saltos realmente y por tanto, las volatilidades SVCJ simuladas (y también las rentabilidades) son similares a las generadas a partir del modelo SVJ, y no se aproximan a las series de volatilidades condicionales calculadas mediante ventanas móviles.

Sin embargo, lo cierto es que con la estimación final se ha conseguido reducir significativamente la función objetivo desde su valor inicial, un 80%, 92%, 69% y 82% para los índices S&P 500, DAX 30, IBEX 35 y CAC 40, respectivamente. Y lo que es más importante, también con respecto al valor obtenido previamente para SVJ, del 36% para el DAX 30 y del 25% para el CAC 40, con quasi-estadísticos *t* menores en valor absoluto, lo que indica que con SVCJ se está capturando mejor la dinámica del proceso de rendimientos de estos dos índices. Destaca, en ambos casos, la reducción en valor absoluto del componente del gradiente de la verosimilitud asociado al parámetro γ_1, lo que sugiere que mediante la introducción de saltos en volatilidad se ha logrado capturar mejor la asimetría, y compensar la restricción impuesta por el modelo auxiliar de comportamiento simétrico de la volatilidad ante posibles *shocks* (positivos o negativos). En el caso estadounidense la reducción de la función objetivo es únicamente del 5% (con quasi-estadísticos *t* elevados), y en el caso español, la función objetivo aumenta un 38% (de 0.0016 a 0.0022), lo que se refleja en los quasi-estadísticos *t*, los cuales han aumentado para γ_0 y, sobre todo, para ϑ_1. Así, para todos los índices salvo para el IBEX 35, el valor del estadístico Chi-cuadrado disminuye desde su valor en el modelo SVJ, necesitando sólo un grado de libertad para, al 99% de confianza, no rechazar el modelo SVCJ en el caso del DAX 30, y dos para los índices S&P 500 y CAC 40.

En cuanto al ajuste en asimetría y curtosis, sorprende que el deterioro observado para la función objetivo en el caso español, no venga acompañado de peores ajustes de asimetría y curtosis con respecto a SVJ. Aunque se pierde algo de precisión en el ajuste de la curtosis, mejora tanto el ajuste en asimetría como el ajuste conjunto de ambos momentos ($FP_{conjunta}$ disminuye de 22% a 15%). También en el caso del DAX 30 mejora el ajuste conjunto, destacando el ajuste casi perfecto de la asimetría. Para los dos índices restantes se pierde precisión, pero lo cierto es que

sobre todo en el caso del CAC 40 y también del S&P 500, la asimetría y curtosis generadas son muy similares a las muestrales, más de lo que en un principio sugieren los porcentajes de falta de ajuste.

Nótese que en la función de pérdida conjunta asignamos el mismo peso a ambos momentos, pero esto puede modificarse fácilmente en función de cuál sea la característica que más nos interese ajustar. En este sentido, es interesante observar cómo varía la función de pérdida conjunta si la consideramos asimétrica en ambos inputs. Tomamos por tanto la siguiente combinación lineal convexa en asimetría y curtosis:

$$FP^{\omega}_{conjunta} = \omega \times FP_{asimetría} + (1-\omega) \times FP_{curtosis}, \quad \omega \in [0,1] \qquad (3.2)$$

de forma que para $\omega = 0$, $FP^{\omega=0}_{conjunta} = FP_{curtosis}$ y para $\omega = 1$, $FP^{\omega=1}_{conjunta} = FP_{asimetría}$. Cuando $\omega = 0.5$, la $FP_{conjunta}$ del Capítulo 2 es un caso particular de esta. Los resultados indican en general una función $FP^{\omega}_{conjunta}$ creciente con ω. A medida que damos más peso al ajuste en asimetría, aumentado ω, aumenta la falta de ajuste conjunto, lo que refleja que la asimetría es la característica que peor se reproduce en todos los modelos, y que, si no se le asigna mucho peso a dicha característica, el ajuste conjunto (en el cual la curtosis tendrá más importancia) mejora significativamente. En este sentido, destacan el caso español (modelos SVJ y SVCJ) y francés (modelo SVCJ), donde el ajuste en asimetría es bastante peor en comparación con el buen ajuste en curtosis. Únicamente para el DAX 30 tenemos el efecto contrario en el modelo SVCJ, una función $FP^{\omega}_{conjunta}$ decreciente en ω, y que se debe al ajuste prácticamente perfecto de la asimetría.

Finalmente nos preguntamos en qué medida los distintos modelos estructurales recogen los saltos muestrales. Perseguimos dos objetivos: por un lado, valorar cada modelo de una forma distinta, desarrollando una medida que capture el ajuste del componente salto, y por otro lado, con esta medida comparar entre los distintos modelos, para tener un criterio adicional que nos ayude a elegir entre ellos.

Lo hacemos mediante simulación. Para cada índice y modelo se generan $S = 100$ trayectorias de tamaño $n - z$. n es el tamaño muestral y $z = 200$ es el número de observaciones iniciales que descartamos para aproximar el valor inicial de la varianza, necesario para simular, por la varianza muestral de los z primeros datos.

A continuación, comparamos los saltos simulados con los saltos muestrales, para lo que construimos un histograma de ambas series, calculando la siguiente medida agregada que recoge la distancia entre la frecuencia de saltos muestrales y simulados en media sobre las *S* simulaciones:

$$distancia = \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S} distancia_s = \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}\sum_{\omega=1}^{\Omega}\left|FS_\omega(\tilde{r}) - FS_\omega\left(\hat{r}_s^{MDLO}\right)\right| \qquad (3.3)$$

donde Ω es el número de intervalos en los que se divide el eje x de magnitud de salto en la construcción de los histogramas.

La Tabla 3.1 muestra los resultados para cada índice y modelo, así como los cambios producidos, en porcentaje, en dicha medida al ir extendiendo el modelo.

Tabla 3.1: Índices Bursátiles: Ajuste del Componente Salto

Ajuste del Componente Salto: Valores *distancia*				
	S&P 500	DAX 30	IBEX 35	CAC 40
SV	860.15	1270.66	1583.66	1550.06
SVJ	365.91 -57%	881.53 -31%	896.53 -43%	1179.16 -24%
SVCJ	344.90 -6%	782.86 -11%	821.11 -8%	1060.48 -10%

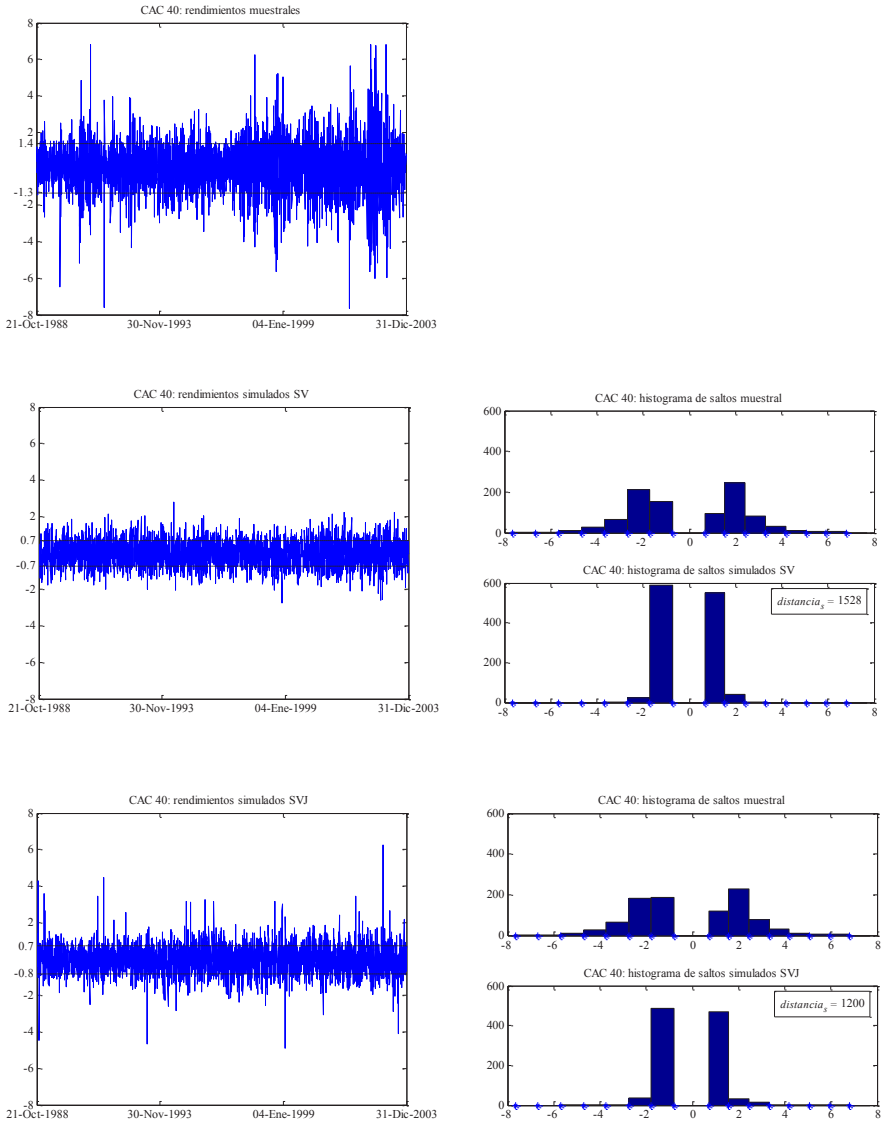
Se confirman los obtenidos previamente al comparar los valores finales de la función objetivo de las estimaciones. Como era de esperar, añadir saltos en rentabilidad al modelo SV mejora de manera importante el ajuste de los saltos, destacando sobre todo el caso del S&P 500 para el que la medida *distancia* disminuye un 57%. Aunque en menor medida, también mejora el ajuste al incorporar saltos en volatilidad, en todos los casos incluido el IBEX 35, índice para el que la función objetivo empeoraba con respecto al modelo SVJ, no ocurría lo mismo en el ajuste de la asimetría y curtosis.

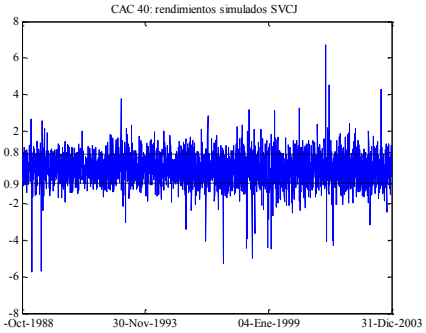
La Figura 3.1 recoge para el CAC 40[36], las rentabilidades diarias observadas y las generadas, para cada uno de los tres modelos estimados, para

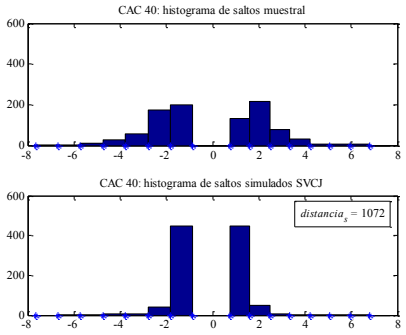
36 Para el resto de índices las conclusiones son similares.

una trayectoria representativa (en cuanto a que sus valores *distancia* se aproximan a los valores *distancia* obtenidos a partir de la expresión (3.3)), así comolos histogramas de saltos muestrales y simulados, para la misma simulación representativa, a partir de los cuales se calcula los valores *distancia*, y por tanto, la medida *distancia* final.

Figura 3.I: Índices Bursátiles: Ajuste del Componente Salto del CAC 40







Se ve claramente cómo un modelo SV no reproduce los saltos observados. La frecuencia tan alta de saltos simulados SV alrededor del origen observada en los histogramas es engañosa, puesto que las rentabilidades identificadas como saltos no lo son realmente, tal y como se aprecia en el gráfico de rendimientos simulados SV. Sin embargo, con un modelo SVJ/SVCJ, el componente salto se reproduce mucho mejor. El número total de saltos simulados es similar a lo observado en los datos, aunque no se generan tantos saltos grandes, además de que éstos a veces en las simulaciones no caen en el mismo intervalo que en los datos.

En cualquier caso, se observan dos carencias importantes. La primera, que los saltos simulados son demasiado esporádicos y no parece haber persistencia de saltos. Y la segunda, que las rentabilidades simuladas no terminan de ajustarse a los datos, en el sentido de que son más planas, el componente normal de volatilidad es muy estrecho, mientras que los datos son más dispersos. Una extensión evidente, y a la vez atrayente, de este trabajo es intentar recoger este efecto. Para ello, lo más sensato es modificar la especificación del componente salto. Una posibilidad es considerar un salto *shot-noise*, un salto cuya magnitud se va amortiguando, de forma que en realidad lo que tendríamos sería equivalente a una secuencia de saltos decreciente del mismo signo. Otra posibilidad, es considerar la misma especificación de salto que hasta ahora, saltos aislados, pero modificando la probabilidad de ocurrencia de salto para que aumente cuando recientemente se haya producido un salto, es decir, para que sea dependiente de la ocurrencia reciente de salto.

3.5. Carteras extremas de Fama-French

En esta sección analizamos los modelos de interés para rendimientos diarios de tres carteras extremas de las 25 de Fama-French. Estas carteras han sido ampliamente utilizadas para evaluar modelos de valoración de activos, pero la literatura previa se ha encontrado con dificultades a la hora de explicar el comportamiento de las carteras extremas: las de mayor y menor capitalización bursátil, denominadas *grande* y *pequeño*, y las de alto y bajo ratio VC/VM, denominadas empresas *valor* y de *crecimiento*, siendo estas últimas las más difíciles de explicar. Por ello consideramos las tres carteras extremas: C_{11} (*pequeño-crecimiento*), C_{15} (*pequeño-valor*) y C_{51} (*grande-crecimiento*), con datos de rentabilidades diarias entre el 1 de julio de 1963 y el 30 de septiembre de 2008, lo que supone un total de 11391 observaciones en cada caso.

Efectivamente se obtiene una rentabilidad media mayor para las empresas pequeñas (C_{11}) respecto a las empresas grandes (C_{51}) y más aún para las empresas valor (C_{15}) con respecto a las empresas de crecimiento (C_{11}). Además, en ambos casos, las carteras con menor rentabilidad son las que mayores volatilidades presentan, característica que complica la explicación del comportamiento de estas carteras. Por otro lado, las tres presentan asimetría negativa y, sobre todo, bastante curtosis, por lo que a priori parecen candidatas naturales para analizar la adecuación de los modelos SV, SVJ y SVCJ.

Las estimaciones muestran una reducción importante de la función objetivo desde la condición inicial, y también según se extiende el modelo de SV a SVJ (de un 42%, 52% y 30% para C_{11}, C_{15} y C_{51}, respectivamente) y a SVCJ después (con un 29%, 86% y 71% de reducción). Así, el estadístico Chi-cuadrado también disminuye considerablemente y, aunque la elección del modelo auxiliar sencillo GARCH(1,1) imposibilita realizar el contraste de bondad de ajuste asociado al método EMM, observamos que, al 99% de confianza, según se considera un modelo más complejo, para no rechazarlo se necesitarían cada vez menos grados de libertad. Por ejemplo, en el caso de la cartera C_{15}, vemos cómo necesitaríamos diecisiete, seis y únicamente un grado de libertad para no rechazar el modelo SV, SVJ y SVCJ, respectivamente.

Por otro lado, de nuevo destaca la falta de precisión obtenida en la estimación de los parámetros de correlación ρ y ρ_{jv}, lo que nos sugiere analizar formas alternativas para introducir esta característica en el modelo estructural. Para las carteras C_{11} y C_{51}, también tenemos algún problema a la hora de identificar correctamente el parámetro de magnitud de salto en volatilidad m_{jv}. Sin embargo, la precisión alcanzada para el resto de parámetros es buena.

Cabe destacar cómo en general, para los modelos extendidos SVJ y SVCJ, los parámetros asociados a la volatilidad son los que en principio esperaríamos dada la mayor volatilidad muestral observada, tanto en la cartera de mayor tamaño (C_{51}) con respecto a la de menor tamaño (C_{11}), como en la de crecimiento (C_{11}) con respecto a la de valor (C_{15}). La volatilidad de la varianza, η, es mayor para las carteras más volátiles, así como la magnitud de salto en rentabilidad δ. También el parámetro de persistencia en varianza, β, es mayor para la cartera de crecimiento C_{11} que para la cartera valor C_{15}.

Sin embargo, los quasi-estadísticos *t* indican una falta de especificación importante de la varianza condicional del proceso. Parece que la simetría impuesta por el modelo auxiliar ante *shocks*, positivos y negativos, en volatilidad, no es lo más adecuado, ya que el quasi-estadístico *t* asociado al parámetro es, en general, muy elevado. Tampoco la persistencia en volatilidad, recogida en el parámetro ϑ_t, parece capturarse de forma apropiada.

Finalmente, como era de esperar, un modelo de volatilidad estocástica sin saltos, SV, no es suficiente para acomodar la asimetría y curtosis muestral, y es que los valores generados para estos momentos no se alejan de los valores normales (asimetría nula y curtosis en torno a 3). No obstante, añadir saltos al modelo mejora mucho el ajuste, sobre todo de la curtosis, que es prácticamente perfecto. Pero no ocurre lo mismo para la asimetría. Los modelos extendidos SVJ y SVCJ tienen problemas a la hora de capturar esta característica, que es precisamente la característica no normal menos acusada de los datos. Parece que, tal y como intuíamos al analizar los rendimientos de distintos índices bursátiles, para que los modelos de volatilidad estocástica con saltos en rentabilidad y con o sin saltos en volatilidad ajusten bien los momentos de tercer y cuarto

orden, es necesario que éstos presenten valores no normales pronunciados. Aunque por otro lado, es cierto que a pesar de que las carteras analizadas no presentan demasiada asimetría negativa, ésta es similar a la de los índices europeos para los que también destacaba el peor ajuste en asimetría (respecto al buen ajuste en curtosis) pero no tanto como aquí en el caso de las carteras. Esto nos sugiere que hay algo más detrás de esta falta de ajuste del momento de tercer orden, lo que nos lleva de nuevo al parámetro de correlación entre Brownianos ρ, que es negativo pero de magnitud muy baja en valor absoluto (tanto para el modelo SVJ como para el modelo SVCJ) y que además se estima sin precisión.

Si analizamos los valores obtenidos para la función de pérdida asimétrica en ambos momentos dada por la expresión (3.2), vemos que de nuevo, ésta es creciente con ω, de forma que el ajuste conjunto empeora a medida que damos más peso a la asimetría. Este efecto es además mucho más pronunciado en el caso de las carteras (en comparación con lo observado previamente para los índices), ya que el ajuste en asimetría es bastante peor en comparación con el buen ajuste en curtosis.

Por ultimo, al comparar los valores de la medida *distancia* se llega a la misma conclusión que al comparar los valores de la función objetivo. El ajuste del componente salto mejora notablemente al extender el modelo SV considerando saltos en rentabilidad y también, aunque en menor medida, al extender este último mediante saltos en volatilidad, salvo para la cartera C_{11}, donde el ajuste de los saltos empeora de forma mínima (un 1%), y que coincide precisamente con el caso en donde la función objetivo menos se reduce. El análisis de los histogramas de saltos confirman los resultados obtenidos para los índices bursátiles. En resumen, vemos cómo un modelo SV no es suficiente para reproducir los saltos observados en los datos, mientras que un modelo que incorpore además saltos en rentabilidad con o sin saltos en volatilidad mejora mucho el ajuste de dicho componente salto, aunque las rentabilidades simuladas en estos casos no terminan de ajustar la dispersión observada en los datos. Por tanto, también en el caso de las carteras, queda de manifiesto la necesidad de explorar especificaciones alternativas del componente salto, y en particular de la probabilidad de ocurrencia de salto, que recojan este efecto.

3.6. Conclusiones

Aunque fundamentales, la volatilidad estocástica y los saltos en rentabilidad pueden no ser suficientes para explicar el comportamiento de rendimientos alejados de la distribución normal. Este capítulo propone introducir saltos en volatilidad al modelo, obteniendo resultados favorables a esta extensión cuando se analizan rendimientos diarios de cuatro índices bursátiles distintos: el S&P 500 (entre 1986 y 2005), el DAX 30, el IBEX 35 y el CAC 40 (estos últimos entre 1998 y 2003); y de tres carteras extremas de las 25 de Fama-French: C_{11}, C_{15} y C_{51} (entre julio de 1963 y septiembre de 2008). Con esta extensión, la función objetivo, y por tanto también el estadístico Chi-cuadrado de bondad de ajuste, se reduce significativamente, sugiriendo que se captura mejor el proceso de volatilidad, y esto sin perder precisión en el ajuste de los momentos de tercer y cuarto orden de las rentabilidades, siempre y cuando éstos presenten valores no normales pronunciados.

Un análisis del ajuste del componente salto (desarrollando una medida que captura mediante simulación dicho ajuste) confirma además estos resultados. Es necesario considerar saltos en rentabilidad y también, aunque en menor medida, saltos en volatilidad para reproducir los saltos muestrales. Sin embargo, las rentabilidades simuladas en estos casos no terminan de ajustar la dispersión observada en los datos, lo que sugiere la necesidad de explorar especificaciones alternativas del componente salto, y en particular de la probabilidad de ocurrencia de salto, que recojan este efecto.

Por último, la falta de precisión sistemática de los parámetros de correlación ρ y ρ_{jv}, sugiere introducir de forma alternativa esta característica en el modelo. Una extensión potencial de este trabajo, puede ser considerar, por un lado, una correlación entre Brownianos ρ no constante y dependiente de una variable de estado, ya sea la rentabilidad o la propia varianza, dejando que sea la estimación quién determine si es o no constante en el tiempo, y por otro, siguiendo a Broadie, Chernov y Johannes (2007), una correlación entre magnitudes de salto ρ_{jv} nula, para ver si el problema radica en la excesiva parametrización.

REFERENCIAS

Capítulo 1

Acharya, V. y L. Pedersen (2005), "Asset pricing with liquidity risk", *Journal of Financial Economics* 77, 375-410.

Amihud, Y. (2002), "Illiquidity and stock returns: cross section and time series effects", *Journal of Financial Markets* 5, 31-56.

Amihud, Y. y H. Mendelson (1986), "Asset pricing and the bid-ask spread", *Journal of Financial Economics* 17, 223-249.

Amihud, Y., H. Mendelson y L. Pedersen (2005), "Liquidity and asset prices", *Foundations and Trends in Finance* 1, 269-364.

Biais, B, L. Glosten y C. Spatt (2005), "Market microstructure: a survey of microfoundations, empirical results, and policy implications", *Journal of Financial Markets* 8, 217-264.

Brennan, M. y A. Subrahmanyam (1996), "Market microstructure and asset pricing: on the compensation for illiquidity in stock returns", *Journal of Financial Economics* 41, 441-464.

Chordia, T, R. Roll y A. Subrahmanyam (2000), "Commonality in liquidity", *Journal of Financial Economics* 56, 3-28.

Easley, D., S. Hvidkjaer y M. O'Hara (2002), "Is information risk a determinant of asset returns?", *Journal of Finance* 57, 2185-2221.

Hasbrouck, J. (2009), "Trading costs and returns for U.S. equities: estimating effective costs from daily data", *Journal of Finance* 64, 1445-1477.

Hasbrouck, J. y D. Seppi (2001), "Common factors in prices, order flows, and liquidity", *Journal of Financial Economics* 59, 383-411.

Kamara, A., X. Lou, y R. Sadka (2008), "The divergence of liquidity commonality in the cross-section of stocks", *Journal of Financial Economics* 89, 444-466.

Korajczyk, R. y R. Sadka (2008), "Pricing the commonality across alternative measures of liquidity", *Journal of Financial Economics* 87, 45-72.

Kyle, A. (1985), "Continuous auction and insider trading", *Econometrica* 53, 1315-1335.

Lee, C., B. Mucklow y M. Ready (1993), "Spreads, depths, and the impact of earnings information: an intraday analysis", *Review of Financial Studies* 6, 345-374.

León, A., J. Nave y G. Rubio (2007), "The relationship between risk and expected return in Europe", *Journal of Banking and Finance* 31, 495-512.

Lo, Andrew (2008), "Optimal liquidity", *Hedge Funds: An Analytic Perspective* 4, Princeton University Press.

Márquez, E., B. Nieto y G. Rubio (2009), "Consumption, liquidity, and the cross-sectional variation of expected returns", *6th Research Workshop on Asset Pricing, IE Business School.*

Martínez, M., G. Rubio y M. Tapia (2005), "Understanding the *ex-ante* cost of liquidity in the limit order book: a note", *Revista de Economía Aplicada* 13, 95-109.

Martínez, M., B. Nieto, G. Rubio y M. Tapia (2005), "Asset pricing and systematic liquidity risk: an empirical investigation of the Spanish stock market", *International Review of Economics and Finance* 14, 81-103.

O'Hara, M. (2003), "Liquidity and price discovery", *Journal of Finance* 58, 1335-1354.

Pascual, R. (2003), "Liquidez: una revisión de la investigación en microestructura", *Revista de Economía Financiera* 1, 80-126.

Pastor, L. y R. Stambaugh (2003), "Liquidity risk and expected stock returns", *Journal of Political Economy* 111, 642-685.

Watanabe, A. y M. Watanabe (2008), "Time-varying liquidity risk and the cross section of stock returns", *Review of Financial Studies* 21, 2449-2486.

Capítulos 2 y 3

Andersen, T., L. Benzoni y J. Lund (2002), "An empirical investigation of continuous-time equity return models", *Journal of Finance* 57, 1239-1284.

Bakshi, G., C. Cao y Z. Chen (1997), "Empirical performance of alternative option pricing models", *Journal of Finance* 52, 2003-2049.

Bansal, R., A. R. Gallant, R. Hussey y G. Tauchen (1993), "Computational aspects of nonparametric simulation estimation", en D. A. Belsley

(ed.), Computational techniques for econometrics and economic analysis, Kluwer Academic Publishers, Boston, 3-22.

Bansal, R., A. R. Gallant, R. Hussey y G. Tauchen (1995), "Nonparametric estimation of structural models for high-frequency currency market data", Journal of Econometrics 66, 251-287.

Bates, D. (2000), "Post-'87 crash fears in S&P 500 futures option market", *Journal of Econometrics* 94, 181-238.

Broadie, M., M. Chernov y M. Johannes (2007), "Model specification and risk premia: evidence from futures options", *Journal of Finance* 62, 1453-1490.

Chernov, M., A. R. Gallant, E. Ghysels y G. Tauchen (2003), "Alternative models for stock price dynamics", *Journal of Econometrics* 116, 225-257.

Duffie, D. y K. J. Singleton (1993), "Simulated moments estimation of markov models of asset prices", *Econometrica* 61, 929-952.

Eraker, B. (2004), "Do stock prices and volatility jump? Reconciling evidence from spot and option prices", *Journal of Finance* 59, 1367-1404.

Eraker, B., M. Johannes y N. Polson (2003), "The impact of jumps in volatility and returns", *Journal of Finance* 58, 1269-1300.

Fenton, V. M. y A. R. Gallant (1996a), "Convergence rates of SNP density estimators", *Econometrica* 64, 719-727.

Fenton, V. M. y A. R. Gallant (1996b), "Qualitative and asymptotic performance of SNP density estimators", *Journal of Econometrics* 74, 77-118.

Gallant, A. R. y J. R. Long (1997), "Estimating stochastic differential equations efficiently by minimum chi-square", *Biometrika* 84, 125-141.

Gallant, A. R. y D. W. Nychka (1987), "Semi-nonparametric maximum likelihood estimation", *Econometrica* 55, 363-390.

Gallant, A. R. y G. E. Tauchen (1989), "Seminonparametric estimation of conditionally constrained heterogeneous processes: asset pricing applications", *Econometrica* 57, 1091-1120.

Gallant, A. R. y G. E. Tauchen (1996), "Which moments to match?", *Econometric Theory* 12, 657-681.

Gallant, A. R. y G. E. Tauchen (1997), "Estimation of continuous-time models for stock returns and interest rates", *Macroeconomic Dynamics* 1, 135-168.

Heston, S. L. (1993), "A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options", *Review of Financial Studies* 6, 327-343.

Hull, J. y A. White (1987), "The pricing of options on assets with stochastic volatilities", *Journal of Finance* 42, 281-300.

Melino, A. y S. M. Turnbull (1990), "Pricing foreign currency options with stochastic volatility", *Journal of Econometrics* 45, 239-265.

Pan, J. (2002), "The jump-risk premia implicit in options: evidence from an integrated time-series study", *Journal of Financial Economics* 63, 3-50.

Tauchen, G. E. (1997a), "New minimum chi-square methods in empirical finance", en Kreps, D.M., Wallis, K.F., eds., *Advances in Economics and Econometrics: Theory and Applications*, Seventh World Congress, Cambridge University Press, Cambridge.

Wiggins, J. B. (1987), "Option values under stochastic volatility: theory and empirical estimates", *Journal of Financial Economics* 19, 351-372.

PUbliCan
Ediciones
Universidad de Cantabria

Enero 2013

Este trabajo estudia las tres características clave de los precios de los activos, liquidez, rentabilidad y riesgo, las cuales forman el conjunto de los tres puntos de referencia en la toma de decisiones de cualquier inversión financiera.

El objetivo es doble. En primer lugar, analizar el impacto de la liquidez en la selección de carteras, ya que además del rendimiento esperado y el riesgo, la liquidez es en sí misma un determinante de los precios de los activos. En segundo lugar, conscientes de la necesidad de modelos capaces de capturar las regularidades empíricas presentes en las variables financieras, examinar los efectos que factores como la volatilidad estocástica y los saltos tienen en la distribución de rendimientos de índices bursátiles internacionales así como de carteras de renta variable.

Promotora editorial:

Fundación UCEIF
Fundación de la Universidad de Cantabria para el Estudio y la Investigación del Sector Financiero

UC UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Santander

ISBN 978-84-86116-72-9 8 €
9 788486 116729
www.libreriauc.es